Лекции

Уравнения математической физики

лектор: Кокошаров Дмитрий Павлович

ученик Самарский

задачник Самарский, Тихонов

учебник, задачник Владимиров

ученик Баласов, Кравцов, Свешников

05.09

Рассм. $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$

$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (1)

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от (x, y, u, u_x, u_y), то ур-ние (1) наз. квазилинейным.

Если $F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f(x, y)$ и a_{ij}, b_i, c зависят только от x, y, то ур-ние (1) наз. линейным.

(2) $a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy} +$

$+ b_1(x, y) u_x + b_2(x, y) u_y + c(x, y) u + f(x, y) = 0$

Если $f = 0$, то (2) наз. однородным

Если $f \neq 0$, то (2) наз. неоднородным.

Ур-ние Монжа–Ампера: $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \pm 1$

$$\begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{vmatrix} = \pm 1$$

Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят только от x и y:

$(x, y) \longrightarrow (\xi, \eta)$

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\xi} \eta_x \xi_x +$$

$$+ u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y +$$

$$+ u_{\eta\xi} \xi_y \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} (\eta_y)^2 +$$

$$+ u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{\xi\xi} (a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2) +$$

$$+ 2 u_{\xi\eta} (a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y) +$$

$$+ u_{\eta\eta} (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) +$$

$$+ \bar{F} (\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \quad (3)$$

Если F линейна относительно u, u_x, u_y,

то $\bar{F}$ линейна относительно u, u_ξ, u_η.

$$(4)\ \overline{a_{11}} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{11} \left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0 \quad (5)$$

Лемма 1:

Если $\xi = \varphi(x, y)$ — решение (4), то

$\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл ур-ния (6)

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \quad (6)$$

(6) - характеристическое ур-ние для (3)

Док-во: $\varphi(x,y) = C \Rightarrow d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ $\Big|_{y=f(x,C)}^{y=f(x,C)}$ ч.т.д.

Верно и обратное:

Лемма 2: Если $\varphi(x,y)=C$ - общий интеграл (6), то $\xi = \varphi(x,y)$ - решение (4)

Док-во: аналогично предыдущему ч.т.д.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} & (7.1) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} & (7.2) \end{cases} \quad (7)$$

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ наз. дискриминантом исх. ур-ния

1) $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип

2) $\Delta = a_{12}^2 - a_1 a_{22} < 0 \Rightarrow$ эллиптический тип

3) $\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип

$$\overline{\Delta} = \overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\overline{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})J^2,$$

где $J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ при замене сохраняется тип ур-ния

1) Рассм. обл G, во всех точках которой

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$$

$\xi = \varphi(x,y)$ – решение (7.1)

$\eta = \psi(x,y)$ – решение (7.2)

$$\Rightarrow \overline{a_{11}} = \overline{a_{22}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_{\xi\eta} = \overline{\Phi} \quad , \text{где} \quad \overline{\Phi} = -\frac{\overline{F}}{2\overline{a_{12}}}$$

↑ 1ая каноническая форма для ур-ния гиперболического типа

2ая каноническая форма:

$$\begin{cases} \alpha = (\xi + \eta)\cdot\frac{1}{2} & \xi = \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2 \\ \beta = (\xi - \eta)\cdot 1/2 & \eta = \frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2 \end{cases}$$

$$u_\xi = u_\alpha \cdot \frac{1}{2} + u_\beta \cdot \frac{1}{2}$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha}\cdot\frac{1}{4} + u_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{4}\right) + u_{\beta\alpha}\cdot\frac{1}{4} + u_{\beta\beta}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\overline{\Phi}$$

↑ 2ая каноническая форма.

2) Пусть в обл G $\Delta = 0$, т.е.

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0.$$

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$$

$$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$$

$a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$, тогда $\overline{a_{12}} = a_{11}\xi_x\eta_x +$

$$+ \sqrt{a_{11}a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)$$

$$\overline{a_{11}} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a_{12}} = 0$$

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

3) $\Delta < 0$.

В этом случае (7.1) имеет решение:

$$\xi(x,y) = \varphi(x,y)$$

комплекс.

(7.2) имеет решение:

$$\eta(x,y) = \psi(x,y)$$

комплекс.

$$u_{\xi\eta} = \widetilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \alpha = \operatorname{Re}\varphi,$$

$$\eta = \alpha - i\beta, \quad \beta = \operatorname{Im}\varphi$$

Характеристики $\xi_x = \alpha_x + i\beta_x$; $\xi_y = \alpha_y + i\beta_y$

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$

$$= a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) +$$

$$+ a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y +$$

$$+ a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y +$$

$$+ a_{22}\beta_y^2) + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y +$$

$$+ \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{a_{11}}} = \overline{\overline{a_{22}}}, \overline{\overline{a_{12}}} = 0$$

$$\Rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \overline{\Phi}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ – ур-ние колебаний струны

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -a^2$

$\chi = 0 + a^2 > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип

2) $u_t = a^2 u_{xx}$ – ур-ние теплопроводности

$\Rightarrow$ параболический

3) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ – ур-ние Лапласа

$\chi = -1 \Rightarrow$ эллиптический тип

1) $u_{xx} = u_{yy}$

Решения $u = 0, 1, x, y, x^2+y^2, \sin x \sin y$

$u = f_1(x+y) + f_2(x-y)$ — общее решение

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{yy}, & x>0,\ 0<y<\pi \\ u|_{x=0} = \sin y \\ u_x|_{x=0} = \cos y \end{cases}$$

↑

имеет единственное решение $u(x,y) = \sin(x+y)$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = 0, & 0<x,\ y<\pi \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

↑

имеет решения: $u = 0, \sin x \sin y, \sin kx \sin ky$

Как избавиться от первых производных в ур-ниях с постоянными коэффициентами

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0.$$

или нулями $a_{12} = 0$ (от него всегда можно избавиться)?

$$a_{11} u_{xx} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0$$

$$u = v e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_x = v_x e^{\lambda x + \mu y} + v \cdot \lambda e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_y = v_y e^{\lambda x+\mu y} + \mu v e^{\lambda x+\mu y}$$

$$u_{xx} = (v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) e^{\lambda x+\mu y}$$

$$u_{yy} = (v_{yy} + 2\mu v_y + \mu^2 v) e^{\lambda x+\mu y}$$

$$a_{11} v_{xx} + a_{22} v_{yy} + v_x (2\lambda a_{11} + b_1) +$$

$$+ v_y (2\mu a_{22} + b_2) + (cv + \lambda^2 v + \mu^2 v) + \tilde{f} = 0,$$

где $\tilde{f} = f \cdot e^{-\lambda x - \mu y}$

Если $a_{11}, a_{22} \neq 0$, то можно подобрать λ и μ так, чтобы $\begin{cases} 2\lambda a_{11} + b_1 = 0 \\ 2\mu a_{22} + b_2 = 0 \end{cases}$

12.09

Глава 2. Уравнения гиперболического типа

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ← простейшее ур-ние колебаний

$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$

$a_{11} = a^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -1$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = a^2 > 0.$

Если сделать замену $y = at \Rightarrow u_{yy} = u_{xx}$.

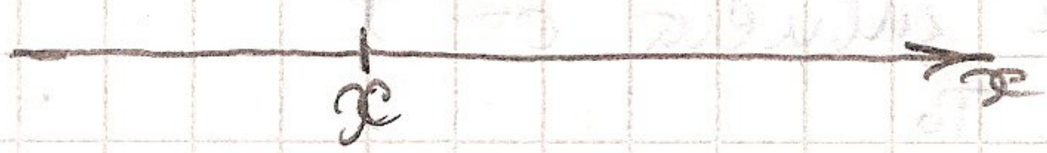
Такие ур-ния обычно описывают колебательные процессы.

§1 Уравнение колебания струн.

Струна: 1 тонкая

2 упругая

3 гибкая



вдоль струн введем одномерную систему координат.

$\vec{u}(x,t)$ – смещение точки с паспортом x для времени t.

① поперечные колебания $u_1(x,t)=0$

② продольные колебания $u_2(x,t)=0$.

$\exists\, u_2(x,t)=u(x,t)$

③ Будем рассм. малые колебания, т.е.

$|u_x(x,t)| \ll 1$

↑

тангенс угла наклона

$$\Rightarrow l(x_1,x_2,t)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,dx \approx x_2-x_1$$

$\Rightarrow$ не меняется натяжение струн со временем

при поперечных колебаниях суммарная сила вдоль оси Ox равна 0

Натяжение: ① $T_x = T_0^{(x)} \cos\alpha =$

$$= \frac{T_0(x)}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}} \approx T_0(x)$$

$T_x(x_2) \approx T(x_2)$

$-T_x(x_1) \approx -T(x_1)$

$\Rightarrow$ натяжение не зависит от x

$\Rightarrow$ это константа T_0

② $T_y(x,t) = T_0 \sin\alpha = T_0 \dfrac{u_x(x,t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}} =$

$= T_0 u_x(x,t)$.

и $\dfrac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}$ или если $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$\Rightarrow$ система мат. точек:

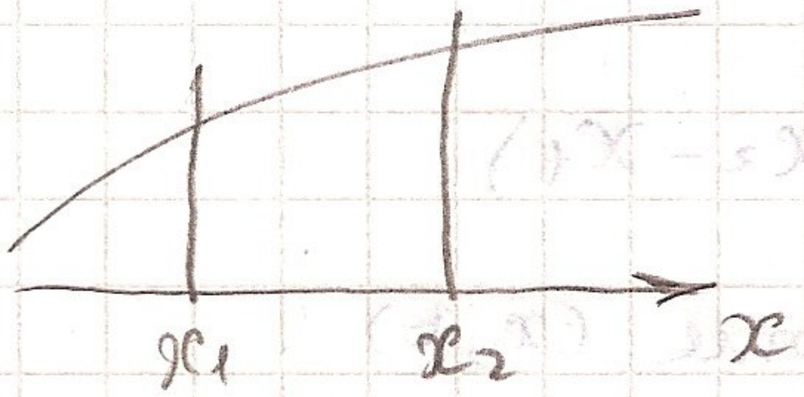
$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad i = 1, 2 \dots n$$

$\vec{F}_i$ – силы внутренние + силы внешние

$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,1} + \vec{F}_{i,2}$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \qquad \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,2}$$

$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = F$, где F – сумма внешних для всех системы сил



выделим кусок струны

$\rho(x)$ - масса линейная

$$\int_{x_1}^{x_2} u_{tt}(x,t)\rho(x)dx = p$$

$$F(t) = T_0\left(u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)\right) + \int_{x_1}^{x_2} F(t,x)dx$$

↑ сила, не связанная с самой струной

Проинтегрируем ур-ние: ~~сила~~ t

$$p(t_2) - p(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt.$$

$$p(t_2) - p(t_1) = \int_{x_1}^{x_2}\left(u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right)\rho(x)dx$$

$$= T_0\int_{t_1}^{t_2}\left(u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t)\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx\,dt$$

Предположим, что u имеет непр.

вторые производные по x и по t.

$\Rightarrow$ воспользуемся ф-лой конечных

приращений Лагранжа и ф-лой ср значения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^*,t^*)(t_2-t_1)(x_2-x_1)\rho(x^*) =$$

$$= T_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x^{**},t^{**})(x_2-x_1)(t_2-t_1) +$$

$$+ F(x^{***}, t^{***})(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)$$

Перейдем к пределу в точке (x, t):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho(x) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t)$$

Если струна однородна $\Rightarrow \rho(x) = const$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_0}F(x,t)$$

О.Б: $\frac{T_0}{\rho_0} = a_2$, $\frac{1}{\rho_0}F(x,t) = f(x,t)$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)}$$

↑

Ур-ние поперечных, малых, плоских колебаний струн.

Если $F(x,t) \neq 0$, то ее вынужденные колебания

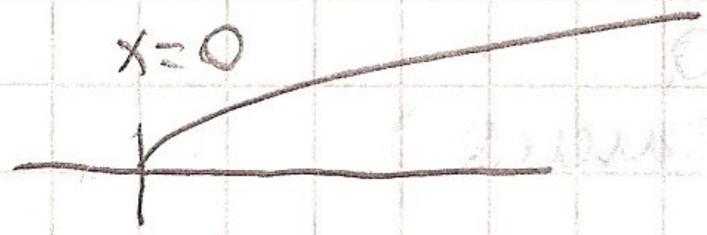
§2 Математическая постановка

задач для уравнения колебания.

I Струна конечной длины: $0 \leq x \leq l$

Начальные условия: $\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$

Граничные условия:



1) $u(0,t) = \mu_1(t)$ - граничное условие первого рода

← условие закрепленного конца

Если $\mu_1(t) = 0$, то $u(0,t) = 0$

2) $u_x(0,t) = \nu_1(t)$ - граничное условие второго рода

То $u_x(0,t) = T_0 \nu_1(t)$

$\Rightarrow$ сила внешнего воздействия $- T_0 \nu_1(t)$

Если $\nu_1(t) = 0$, то это условие свободного конца.

3) $\alpha_1 u_x(0,t) - \beta_1 u(0,t) = \chi_1(t)$ - граничное условие третьего рода

Например: Т упругая сила

Т.е возникает упругая сила, зависящая

прямо пропорц: $T_0 u_x(0,t) = +\gamma u(0,t)$

$\Rightarrow T_0 u_x(0,t) - \gamma u(0,t) = 0$

Если для правого конца, то

$\alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = \chi_2(t)$.

$$I \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) & 0 < x < l \\ & 0 \leq t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \; ; \; u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

II неограниченная струна
(только свободные колебания)

$$\text{II}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < +\infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

III полуограниченная струна.

$$\text{III}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < +\infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = \mu(t) \end{cases}$$

19.09

§3 Метод распространяющихся волн.

п1. Общее решение ур-ния колебания.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Преобразуем к 1ой канонической форме:

$$(dx)^2 - (a\,dt)^2 = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow x - at = c_1 \vee x + at = c_2$$

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) \Rightarrow u = \underbrace{\int f(\eta)\, d\eta}_{f_2} + f_1(\xi)$$

$$\Rightarrow u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

$u_1(x,t) = f_1(x - at)$ и содержит прямую - волну бегущую вправо: $t' = t$, $x' = x - at$.

$$\Rightarrow u_1 = f_1(x')$$

u_1 – волна бегущая вправо

u_2 – волна бегущая влево

№2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = f_1'(x-at)(-a) + a f_2'(x+at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x)$$

f_1 и f_2 — 1-ые одного аргумента

Проинтегрируем по x: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$:

$$\begin{cases} -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds + C \\ f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds - \frac{C}{2} \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,ds + \frac{C}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\left(\int_{x_0}^{x+at} \psi(s)\,ds - \int_{x_0}^{x-at} \psi(s)\,ds\right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

← Формула Даламбера

– Если решение существует, то оно единственно и вид. формулой Даламбера

– Тот подставил данное решение в ур-ние нужно, тот и был

функц. ф-ла, а ψ один раз.

– Пусть даны две задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi_i(x) \\ u_t(x,0) = \psi_i(x) \end{cases}$$

Лемма: если начальные усл. в двух задачах Коши обладают δ-близостью: $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \delta$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \delta$ и если процесс рассм. в течение конечного промежутка времени $[0, t_0]$, то $\forall \varepsilon$ можно указать такие δ и t_0, что $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$.

Док-во: $u_1 - u_2 = u$ =>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \le \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) = \psi(x) \end{cases}$$

=> решение – ф-ла Даламбера:

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a} \cdot 2at\delta \le \delta + t_0\delta \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + t_0} \quad \text{ч.т.д.}$$

Мы доказали непрерывность решения
в задаче Коши

№3. Понятие обобщенного решения задачи
Коши для ур-ния колебания.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

← ↘ не гладкие ф-ии

Построим посл-ть гладких ф-ий:

$\varphi_n \Rightarrow \varphi(x)$; $\psi_n(x) \Rightarrow \psi(x)$

Для $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ существует решение:

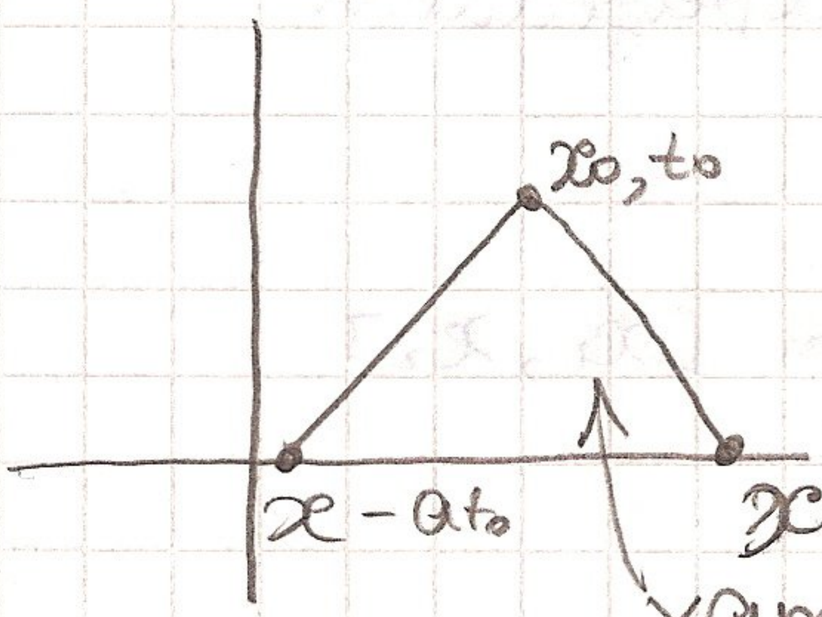
$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_n(x-at) + \varphi_n(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_n(s)\,ds$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

↑ обобщенное решение з. Коши для негладких начальных условий

п4. Интерпретация ф-ии Даламбера.



$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(s)\, ds$$

характеристический треугольник

Построим характеристики:

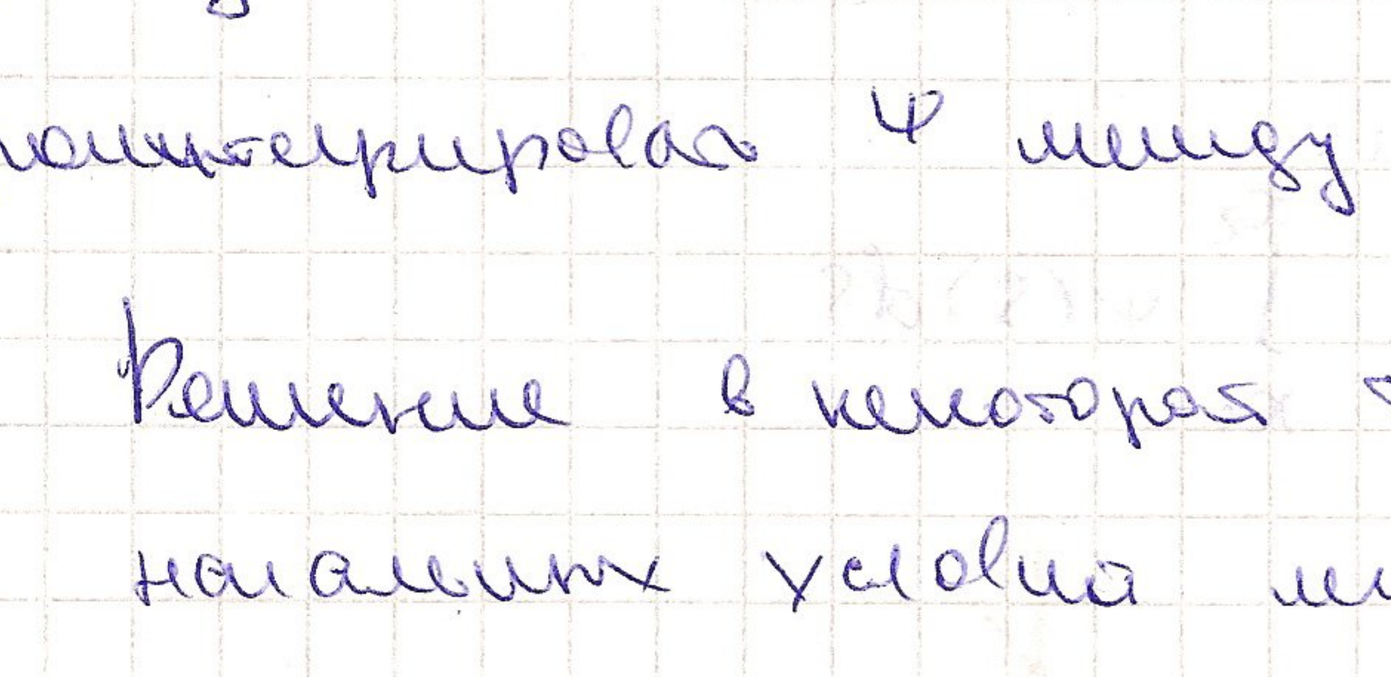
$$\begin{cases} x - at = x_0 - at_0 \\ x + at = x_0 + at_0 \end{cases}$$

$$x = x_0 - at_0, \quad x = x_0 + at_0$$

=> для решения надо взять сумму φ в $(x - at_0)$ и $(x_0 + at_0)$ и проинтегрировать ψ между этими точками

Решение в некоторой точке зависит от начальных условий лежащих на основании характеристического треугольника.

Область зависимости.



В I части: решение определяется

д-лем Даламбера:

Во II части: все элементы $[x_1, x_2]$

начальные усл. равны $= 0$.

$\Rightarrow$ во II и в III областях $u(x,t) = 0$.

В IV области:

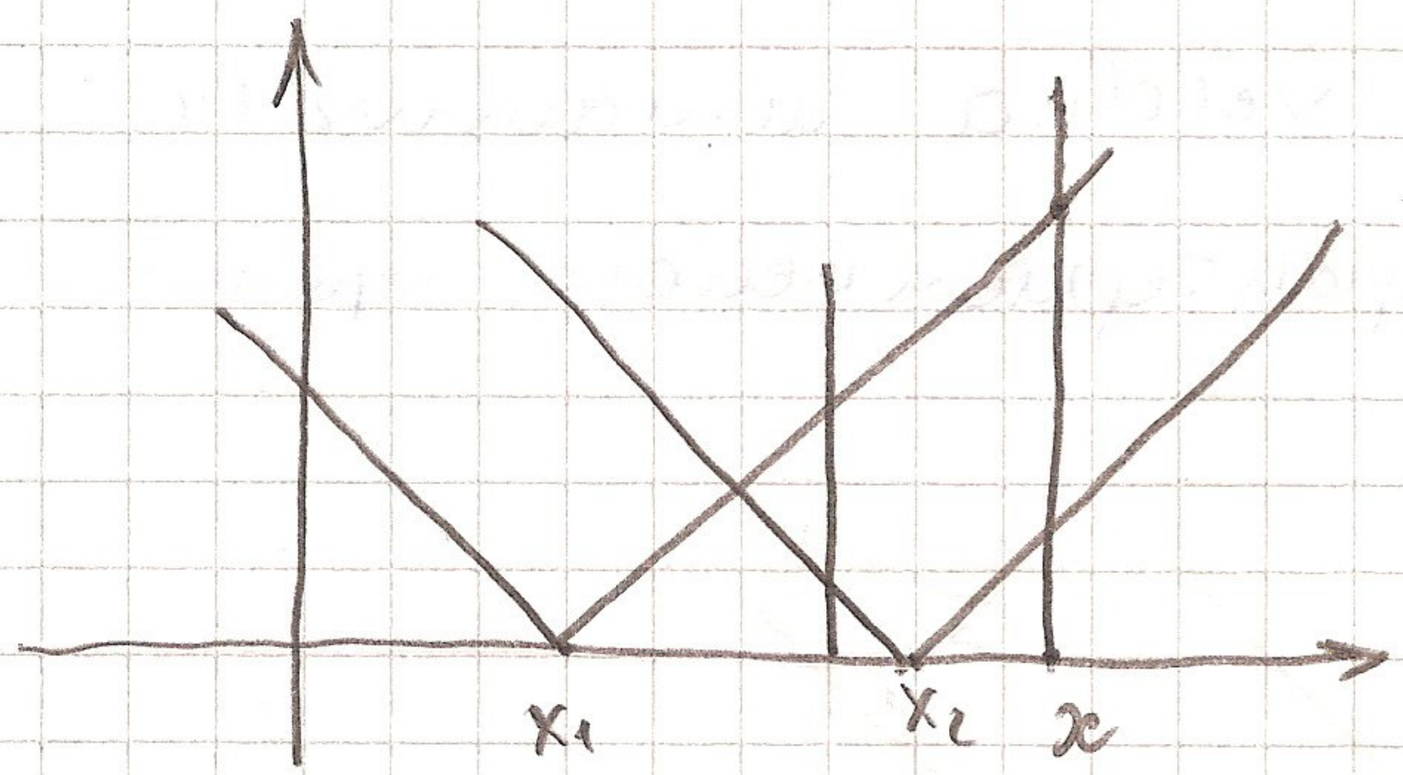
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

В V области:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_2} \psi(s)\,ds$$

В VI области:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x_2} \psi(s)\,ds$$



Ф-ла Даламбера показывает как в разных точках развивается процесс

по Задача для неограниченной струны

$$\text{III}\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < +\infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = \mu(t) & 0 \le t < \infty \end{cases}$$

Будем искать решение в виде суммы двух ф-ий: $u = u_1 + u_2$

$$\text{III}_a\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u_1(0,t) = \mu(t) \end{cases} \qquad \text{III}_b\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \\ u_2(0,t) = 0 \end{cases}$$

Задача III_a решаться на лекциях не будет

Лемма: если в задаче Коши для
неогр. струны начальные ф-ии нч.
нечетным отн. т $x=0$, то
$u(0,t)=0$. Если в задаче Коши для
неогр струны начальные ф-ии нч.
четным отн т $x=0$, то
$u_x(0,t)=0$.

Док-во:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds$$

φ, ψ – нечетные $\Rightarrow$ $u(0,t)=0$.

φ, ψ – четные $\Rightarrow$ $u_x(0,t)=0$.

2ур

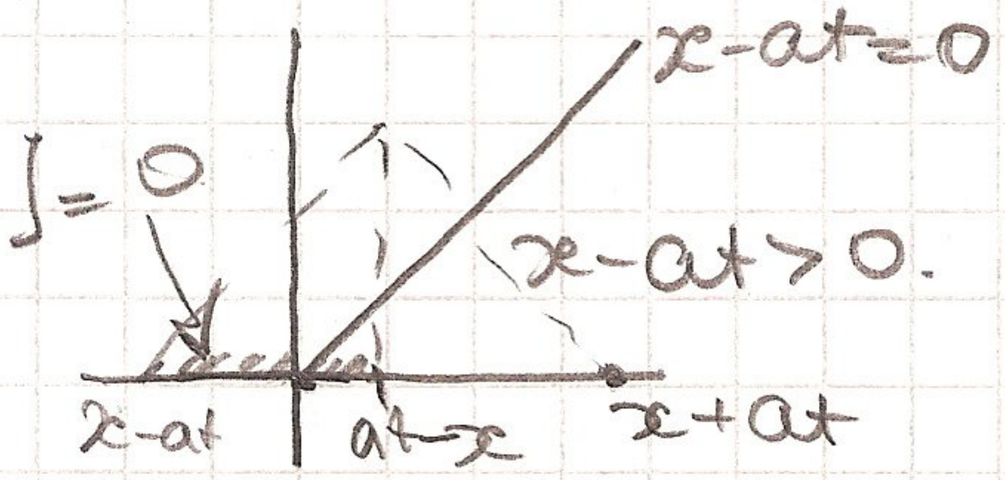
Сведем задачу для полуограниченной
струны нечетного продолжения на отр.
отрицательных значений:

$$\begin{cases}\varphi(x)=-\varphi(-x) & x<0\\ \psi(x)=-\psi(-x) & x<0.\end{cases}$$

Теперь решим задачу II и рассмотрим условие $x > 0$.

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

① $x - at > 0 \Rightarrow$ обычная формула Даламбера.



② $x - at < 0 \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}(-\varphi(at-x) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

26.09 §4. Метод разделения переменных

$$I\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad t>0, \quad 0<x<\ell \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\ell,t) = \mu_2(t) \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \ell$$

№1. Теорема единственности.

(от противного) пусть I два различных решения u_1 и u_2. Составим их разность: $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$v(x,t)$ удовлетворяет однородному ур-нию:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Построим $\frac{1}{\ell}$-ю:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (T_0 v_x^2(x,t) + \rho_0 v_t^2(x,t))\,dx$$

↙ продифференцируем по t под знаком

$$E'(t) = \int_0^\ell (T_0 v_x(x,t) v_{xt}(x,t) +$$

$$+ \rho_0 v_t(x,t) v_{tt}(x,t))\,dx$$

$$\Rightarrow T_0 v_x(x,t) v_t(x,t)\Big|_0^\ell + \int_0^\ell \{-T_0 v_{xx}(x,t) v_t(x,t) +$$

$$+ \rho_0 v_t(x,t) v_{tt}(x,t)\}\,dx =$$

$$= \int_0^l \{ -T_0 V_{xx}(x,t) + \rho_0 V_{tt}(x,t) \} V_t(x,t)\, dx =$$

$$= 0 \quad \text{в силу ур-ния}$$

$$\Rightarrow E_t' = 0 \Rightarrow E(t) = \text{const} \text{ в силу ур-ния и гр. усл.}$$

$E(t) = E(0) = 0$ в силу начальных условий.

$\Rightarrow V_x \equiv 0$ и $V_t \equiv 0 \Rightarrow V(x,t) = \text{const}$

$\Rightarrow V(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

Замечание: т. единственности имеет место и для задач с граничными условиями второго рода.

Замечание: $E(t)$ – энергия струны

$\Rightarrow$ по теореме $\Rightarrow$ энергия струны сохраняется.

Разработка метода разделения переменных:

$$I \begin{cases} u_{xx} = a^2 u_{tt} & 0 < t, \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x \le l \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

на Вещественная задача

$$* \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,t) = X(x)T(t) \\ u(x,t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T''X = a^2 TX''$$

$$\frac{T''}{aT} = \frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow X'' + \lambda X = 0$$

$$** \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \\ X(x) \not\equiv 0 \end{cases} \quad *** \begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

↑

Задача Штурма - Лиувилля (задача на собственные значения и собств ф-ии).

Те значения параметра λ, при которых ** имеет решения, ну собств значениями, а сами решения ну собств. ф-ями.

Условия на собств ф-ии и производные α 0 до l.

$$-\int_0^l X'' X^* dx = \lambda \int_0^l X X^* dx$$

$$-X'X^*\Big|_0^\ell + \int_0^\ell X'(X^*)'dx = \lambda\int_0^\ell XX^*dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell |X'|^2dx = \lambda\int_0^\ell |X|^2dx$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\int_0^\ell |X'|^2dx}{\int_0^\ell |X|^2dx} = \lambda \Rightarrow \lambda > 0$$

$$X(x) = C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0) = C = 0$$

$$X(\ell) = D\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell = \pi n$$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \quad n = 1,2\ldots$$

$$X(x) = X_n(x) = D\sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

Собственные ф-ии определены с точностью до множителя

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n a}{\ell}t + B_n\sin\frac{\pi n a}{\ell}t$$

$$u(x,t) = \left(A_n\cos\frac{\pi n a}{\ell}t + B_n\sin\frac{\pi n a}{\ell}t\right)\sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

$n = 1, 2, \ldots$

$\omega_k = \frac{\pi n a}{\ell}$ $X_k = \frac{k}{n} l$ $k = 0, 1, \dots n$

↑ частота ↑ узлы

Амплитуда: $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$

$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ – основная частота

Величина кратная ω_1 – обертон

№3 Решение задачи о свободных колебаниях струны с закреплёнными концами

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n a}{\ell} t + B_n \sin\frac{\pi n a}{\ell} t\right) \sin\frac{\pi n}{\ell} x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{\ell} x = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{\ell} \sin\frac{\pi n}{\ell} x = \psi(x)$$

$f(x)$ – непр., кусочно гладкая $\Big\}\to \ell$

$f(0) = f(\ell) = 0$

$\Rightarrow$ можно разл. в ряд: $f_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{\pi n x}{\ell} dx$

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{\pi n x}{\ell} dx \qquad (2)$$

$$B_n = \frac{\ell}{\pi n a}\psi_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{\pi n x}{\ell} dx$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = V_0 \dfrac{x(\ell-x)}{\ell^2} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^\ell V_0 \frac{x(\ell-x)}{\ell^2} \sin\frac{\pi n x}{\ell}\, dx =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi n \ell^2 a} \left\{ \frac{-\ell}{\pi n} \cos\frac{\pi n x}{\ell}\, \overset{0}{\overset{''}{x}}(\ell-x)\Big|_0^\ell + \right.$$

$$\left. + \int_0^\ell \frac{\ell}{\pi n} \cos\frac{\pi n x}{\ell} (\ell - 2x)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{2V_0}{\pi^2 n^2 a \ell} \left\{ \frac{\ell}{\pi n} \sin\frac{\pi n x}{\ell}\, \overset{0}{\overset{''}{(}}\ell - 2x)\Big|_0^\ell + \right.$$

$$\left. + \frac{2\ell}{\pi n} \int_0^\ell \sin\frac{\pi n x}{\ell}\, dx \right\} = \frac{4V_0}{\pi^3 n^3 a} \int_0^\ell \sin\frac{\pi n x}{\ell}\, dx =$$

$$= \frac{4V_0}{\pi^4 n^4 a} \left(-\cos\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_0^\ell \right) = \frac{4V_0 \ell}{\pi^4 n^4 a} \left(1 - (-1)^n\right)$$

$$B_n = \frac{4V_0 \ell \left(1-(-1)^n\right)}{\pi^4 n^4 a}$$

$$u(x,t) = \frac{4V_0 \ell}{\pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4} \sin\frac{\pi n a}{\ell} t \sin\frac{\pi n}{\ell} x$$

Обоснование метода разделения переменных 03.10

Продолжение лек. ред (1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \frac{l}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\psi_n|$$

Если $f(x)$ на $[0,l]$ имеет на непр. произ-

водных, а $n+1$ кусочно непр. и

$$f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(l) = 0 \quad 0 \le 2k \le n, \; > \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n |f_n| < \infty$$

Продолжение $u_t(x,t)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n| \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|$$

$u_{tt}(x,t) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\psi_n| \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n|$

$(u_{xx}(x,t)) \Rightarrow$

если сх-ся, то сх-ся и все предыдущие

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\psi_n| \Rightarrow$ Проверим, что

$n=2$, $\varphi''(x)$ – непр, $\varphi'''(x)$ – кус непр

$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n| \Rightarrow$ Проверим, что

$n=1$, $\varphi'(x)$ – непр, $\varphi''(x)$ – кус непр.

$\psi(0) = \psi(l) = 0$

Т.е. данные ограничения входят в теоре-
му о существовании решения задачи.

№4. Задача о вынужденных колебаниях

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Решение существует и будем его искать
в виде: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell}$ (1)

Подставим в ур-ние:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 u_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell},$$

где $f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x,t) \sin\frac{\pi n x}{\ell}\, dx$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n'' = -\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 u_n + f_n \\ u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \end{cases}$$

↑
линейное, неоднородное ур-ние,
однородное с постоянными коэф-ами
Решаем методом вариации
постоянных

$$u_n(t) = \frac{l}{\omega_n a} \int_0^t \sin \frac{\omega_n a}{l} (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau \quad (2)$$

$$u_n(t) = \frac{2}{\omega_n a} \int_0^t d\tau \left(\int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\omega_n \xi}{l} d\xi \right) \times$$

$$\times \sin \frac{\omega_n a}{l} (t-\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi \quad (3) \\ G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\omega_n a} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\omega_n \xi}{l} \sin \frac{\omega_n a}{l} (t-\tau) \end{cases} \quad (4)$$

Пусть: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$

$$u(x,t) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} d\tau \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi =$$

(если q-я f непрерывна по переменным x и t)

$$= \{\tau^* \text{ о средней}\} = G(x, \xi^*, t-\tau^*) \times$$

$$\times \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} d\tau \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(\xi, \tau) d\xi$$

выполнено возрастание сил на струну: $\frac{I}{\rho}$

Смещение в точку, сохранив I.

$\Rightarrow \longrightarrow \frac{1}{\rho} G(x, x_0, t-t_0)$

G - ф-я сосредоточенного мгновенно действующего импульса

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow u = u_1 + u_2$ ← задача о вынужденных колебаниях с нулевыми начальными условиями

↑

решение задачи о свободных колебаниях струн

Для нулевых граничных условий

Пример метода нет!

Все аналогично для граничных условий второго рода, и аналогично для смешанных условий

($u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$ или $u_x(0,t) = u(0,t) = 0$)

	I	II	III
метод сеток решения		+	+
метод разделения переменных	+		

Оба метода достаточно универсальны и позволяют решать все задачи.

§5 Задачи с данными на характеристиках.

$$u_{xt} + a u_x + b u_t + c u = f(x,t) \qquad (1)$$

Рассмотрим задачу в четверти плоскости:

$x \geq 0$, $t \geq 0$.

$$u(x,0) = \varphi_1(x)$$
$$u(0,t) = \varphi_2(t) \qquad (2)$$

Характеристики ур-ния: $x = c_1$

$t = c_2$

(1) - (2) - задача Гурса
(задача с данными на характеристиках)

Условия согласования, т.е

$u(0,0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ — нет противоречия

n1 Исследование задачи сданными на хар-ках.

Пусть a, b, c равны 0, т.е

$$u_{xt} = f(x,t) \quad (3)$$

Решим (3)-(2)

Проинтегрируем ур-ние по прямоугольнику:

$$\int_0^{x_0} dx \int_0^{t_0} u_{xt}(x,t)\,dt = \int_0^{x_0} dx \int_0^{t_0} f(x,t)\,dt$$

$$\int_0^{x_0} dx \; u_x(x,t)\Big|_0^{t_0} = \int_0^{x_0} (u_x(x,t_0) - u_x(x,0))\,dx =$$

$$= u(x,t_0)\Big|_0^{x_0} - u(x,0)\Big|_0^{x_0} =$$

$$= u(x_0,t_0) - u(0,t_0) - u(x_0,0) + u(0,0)$$

$$u(x_0,t_0) = \varphi_1(x_0) + \varphi_2(t_0) - \varphi_1(0) +$$

$$+ \int_0^{x_0} dx \int_0^{t_0} f(x,t)\,dt$$

$$u(x,t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) +$$

$$+ \int_0^{x} \int_0^{t} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad (4)$$

$\Rightarrow$ решение единственно

Если f - непр и φ_1 и φ_2 - дифф-мы

=> можно перейти в ур-ию

$$u(x,0) = \varphi_1(x) + \varphi_2(0) - \varphi_2(0) = \varphi_1(x)$$

$$u(0,t) = \varphi_2(t)$$

Теперь рассм. ур-ие в общем виде:

$$u_{xt} = F(x,t)$$

$$F(x,t) = f(x,t) - a u_x - b u_t - c u$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t F(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^t f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \int_0^x \int_0^t \{a u_\xi + b u_\tau - c u\}\, d\xi\, d\tau \quad (5)$$

Далее можно воспользоваться методом последовательного приближения.

$$u^{[0]}(x,t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \quad (6)$$

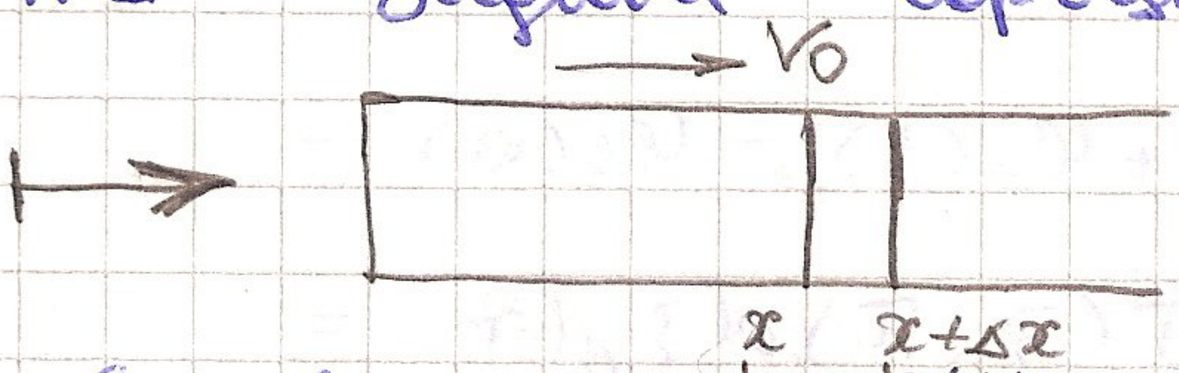
$$u^{[n+1]}(x,t) = \varphi_1(x) + \varphi_2(t) - \varphi_1(0) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \int_0^x \int_0^t \{ a u_\xi^{[n]} + b u_\tau^{[n]} + c u^{[n]} \}\, d\xi\, d\tau \quad (7)$$

Можно д-ть, что предел (6) - (7) ск-ся $\Rightarrow$ д-во существования решения задачи (1) - (2)

№2 Задача сорбции.



раствор

Составим ур-ние баланса вещества:

$u(x,t)$ – конц. р-ра

$a(x,t)$ – связанное вещество

$$u(x,t)\, S v_0 \Delta t - u(x+\Delta x, t)\, S v_0 \Delta t =$$

$$= u(x, t+\Delta t)\, S \Delta x - u(x,t)\, S \Delta x +$$

$$+ a(x, t+\Delta t)\, S \Delta x - a(x,t)\, S \Delta x$$

$$\Rightarrow - v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$ – закон сохранения

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - F(a))$$

↑ динамическая конц-я сорбции

↖ равновесная конц-я сорбции

$\xi = x$, $\tau = t - \frac{x}{v_0}$ — локальное время

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = 0 + \frac{\partial a}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 - \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{v_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = 0. \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - F(a)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\beta}{v_0}(u - F(a)) \\ \frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - F(a)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u_0 \\ a(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - F'(a) \frac{\partial a}{\partial \tau} \right) =$$

$$= -\lambda \frac{1}{v_0} \frac{\partial a}{\partial \tau} - \lambda F'(a) \frac{\partial a}{\partial \xi}$$

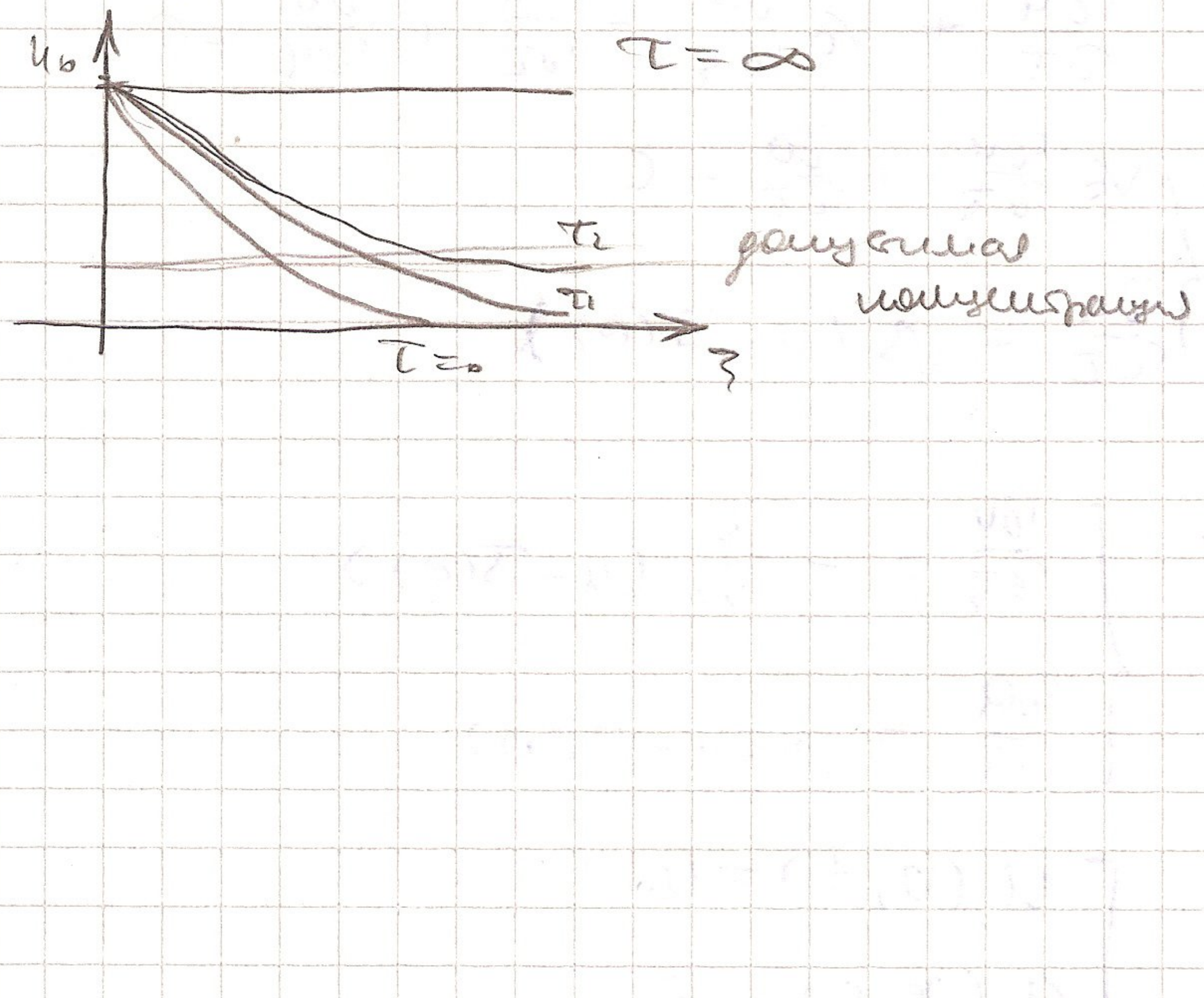
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 a}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\lambda}{v_0} \frac{\partial a}{\partial \tau} + \lambda F'(a) \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0$$

Положим $\tau = 0$.

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \xi} = -\frac{\lambda}{v_0} u$$

$$u(\xi, 0) = C e^{-\frac{\lambda}{v_0}\xi}$$

$$u(\xi, 0) = u_0 e^{-\frac{\lambda}{v_0}\xi}$$



Глава 3 Уравнения параболического типа

$u_t = a^2 u_{xx}$ - ур-ние теплопроводности
ур-ние диффузии

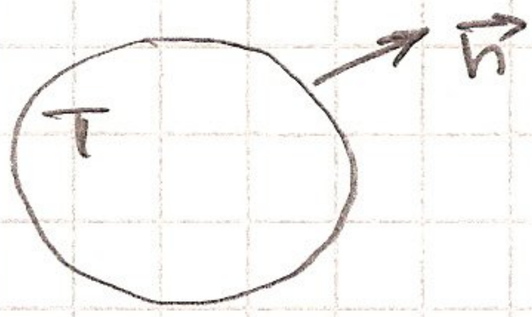
§1 Некоторые задачи, приводящие к уравнению параболического типа

1. Ур-ние баланса (ур-ние непрерывности)

$w(M,t)$ - плотность в-ва / энергии

$\vec{P}(M,t)$ - поток в-ва / энергии

$F(M,t)$ - плотность источников в-ва / энергии



приращение в-ва / энергии в T

$$Q_1 = \iiint_T (w(M,t_2) - w(M,t_1))\,d\tau$$

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint_S (\vec{P}(M,t)\cdot\vec{n})\,ds \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_T \operatorname{div}\vec{P}(M,t)\,d\tau$$

↑
выход энергии / в-ва за T

Количество выделившейся энергии / ед. времени

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_T F(\mu, t)\, d\tau$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad \text{– ур-ние баланса}$$

$$Q_1 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t}(\mu^*, t^*)(t_2 - t_1)V_T \quad (+)$$

V_T – объем области T

Q_2

$$(+)\ \operatorname{div}\vec{P}(\mu^{**}, t^{**})(t_2 - t_1)V_T =$$

$$= F(\mu^{***}, t^{***})(t_2 - t_1)V_T$$

Q_3

$\Rightarrow$ сумма масса времени и сумма ка в одну точку.

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{P} = F \quad \text{– ур-ние баланса}$$

Если $w = \rho$ плотность, то $\vec{P} = \rho\vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad \text{– ур-ние неразрывности гидродинамики}$$

п2. Уравнение теплопроводности

$u(M,t)$ – температура в точке M в момент времени t

$w(M,t) = c\rho\, u(M,t)$ – плотность тепловой энергии

$\vec{P} = -k \operatorname{grad} u$ – тепловой поток

$\Rightarrow$ $c\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(M,t)$ (1)

↑ ур-ние теплопроводности в ср-ве

если среда однородна и k не зависит от координат, то $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M,t)$ (2)

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{1}{c\rho} F$

в одномерном случае: $c\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t)$ (3)

и в однородной среде: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ (4)

п3 Уравнение диффузии

$u(M,t)$ – плотность в-ва

поток диффузии направлен в сторону уменьшения в-ва по градиенту

$\vec{P} = -\overset{\uparrow}{\lambda} \operatorname{grad} u$

↑ изотропность диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} u) + F(x,t)$$

среда однородна: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + F(x,t)$

одномерный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

среда однородна: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$

Будем изучать (4)!

§2 Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности

№1 Математическая постановка задачи для уравнения теплопроводности.



$u(x,0) = \varphi(x)$

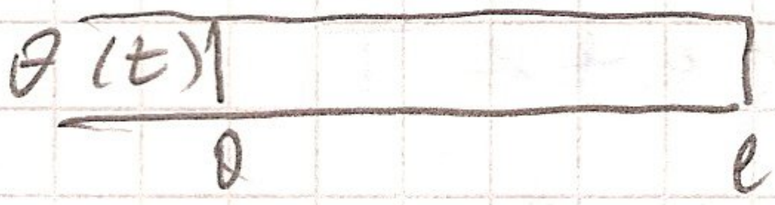
$u(0,t) = \mu(t)$ – граничное условие 1го рода

$u(0,t) = 0$ – однородное граничное условие 1го рода

$u_x(0,t) = \nu(t)$ – граничное условие 2го рода
тепловой поток

$u_x(0,t) = 0$ – условие теплоизолированной поверхности

$\alpha u_x(0,t) - \beta u(0,t) = \chi(0,t)$ – условие теплообмена



$\Rightarrow -k u_x(0,t) = \lambda(\theta(t) - u(0,t))$

$\Rightarrow u u_x(0,t) - \lambda u(0,t) = -\lambda \theta(t)$

I $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & 0 < x < \ell \\ & 0 < t < \infty \\ u(0,t) = \mu_1(t) & 0 \le t < \infty \\ u(\ell,t) = \mu_2(t) & \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x \le \ell \end{cases}$

II $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \\ & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ |u(x,t)| \le M & \end{cases}$

III $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < \infty \\ & 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) & \\ u(0,t) = \mu(t) & \\ |u(x,t)| \le M & \end{cases}$

№2. Принцип максимального и минимального значения.

$u(x,t)$ определена и непрерывна

в области $0 \le x \le \ell$, $0 \le t \le T$

и $u_t = a^2 u_{xx}$ $0 < x < \ell$

$0 < t \le T$

$t=0$, $x=0$, $x=\ell$

$\max\{u(x,0), u(0,t), u(\ell,t)\} =$

$= \max\{u(x,t)\}$

(минимальное значение аналогично)

Док-во (от противного)

$\exists (x_0, t_0)$ $0 < x_0 < \ell$

$0 < t_0 \le T$

$u(x_0,t_0) = \max\{u(x,0), u(0,t), u(\ell,t)\} + \varepsilon$

$\varepsilon > 0$.

Введем вспомогательную ф-ю.

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2T}(t_0 - t)$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0)$$

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$$

$$\left|\frac{t_0 - t}{T}\right| \le 1.$$

$$|v(x,0), v(0,t), v(l,t)| \le$$

$$\le \sup \{u(x,0), u(0,t), u(l,t)\} \le M + \varepsilon/2$$

0.5. $M = \sup \{u(x,0), u(0,t), u(l,t)\}$

$\Rightarrow V(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$

$\Rightarrow$ наибольшее значение v достигается

где-то во внутренней точке (x_1, t_1)

$$0 < x_1 < l$$
$$0 < t_1 \le T$$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) \ge 0$ (т.к. либо внутр. либо гр. $t_1 = T$)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \le 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \le 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

в этой точке не выполнено ур-ние теплопроводности $*$

$i = 1, 2$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & 0 < x < l \\ & 0 < t < \infty \\ u(0,t) = \mu_{1i}(t) & 0 \le t < \infty \\ u(l,t) = \mu_{2i}(t) & \\ u(x,0) = \varphi_i(x) & 0 \le x \le e \end{cases}$$

Следствие 1:

$\mu_{11}(t) \le \mu_{12}(t)$

$\mu_{21}(t) \le \mu_{22}(t)$

$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$

Тогда $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$

Доп-во: $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$

$v(x,t)$ на гр. и в нач. момент неотрицательна $\Rightarrow v(x,t)$ внутри тоже не отрицательна

27

Следствие 2:

$|\mu_{11}(t)| \le \mu_{12}(t)$

$|\mu_{21}(t)| \le \mu_{22}(t)$

$|\varphi_1(x)| \le \varphi_2(x)$

Тогда $|u_1(x,t)| \le u_2(x,t)$

№3 Теорема единственности и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий.

Т1: Задача I не может иметь двух разных решений.

Док-во (от противного)

$u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения

Рассм $v(x,t) = u_1 - u_2$

↑ удовлетворяет с нулевыми начальными однородному ур-нию начальным и гра-ничным условиям.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\overset{\text{№2}}{\Rightarrow}$ $v(x,t) \equiv 0$

ч.т.д.

Т2: 2 задачи:

$|\mu_{11} - \mu_{12}| \le \varepsilon$

$|\mu_{21} - \mu_{22}| \le \varepsilon$

$|\varphi_1 - \varphi_2| \le \varepsilon$

Тогда $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$.

Дан-ло: $v(x,t) = u_1 - u_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v(0,t) = \mu_{11}(t) - \mu_{12}(t)$$

$$v(l,t) = \mu_{21}(t) - \mu_{22}(t)$$

$$v(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

$\Rightarrow$ следствие 2 $\Rightarrow$ $|v(x,t)| \le \varepsilon$

2ур

ТЗ: Задача II не может иметь двух разных решений

Дан-ло (от противного)

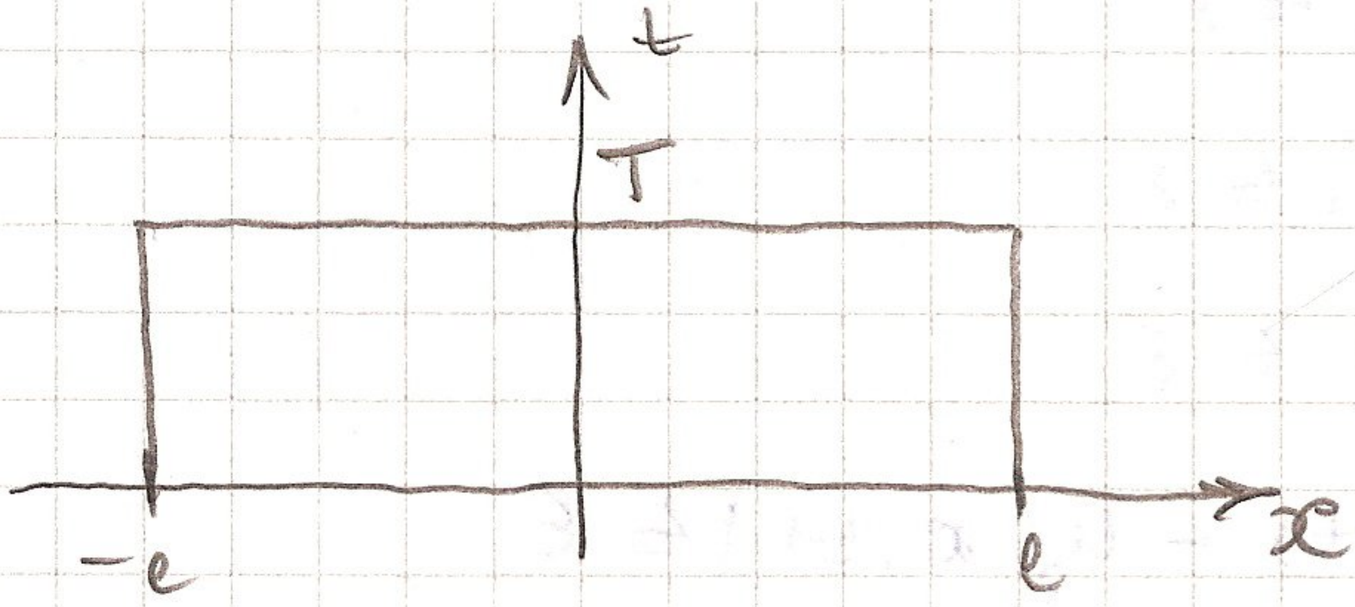
u_1 и u_2 – решения

$v = u_1 - u_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$v(x,0) = 0$

$|v(x,t)| \le M_1 + M_2 = M$



Фиксируем ℓ и T и рассм задачу только в этой области

Введем вспомогательную ф-ию

$$W(x,t) = \frac{M}{\ell^2}(x^2 + 2a^2 t)$$

$$W(x,0) = \frac{M}{\ell^2} x^2 \geq |v(0,t)| = 0$$

$$W(\pm\ell, t) = M\left(1 + 2a^2 \frac{t^2}{\ell^2}\right) \geq M \geq |v(x,t)|$$

$\Rightarrow$ по лемме принцип $W(x,t) \geq |v(x,t)|$

$-\ell \leq x \leq \ell$

$0 \leq t \leq T$

$\ell \to \infty \Rightarrow W(x,t) \longrightarrow 0 \Rightarrow v(x,t) = 0$

$\Rightarrow v(x,t) \equiv 0$

25g

Т-ма: $i = 1,2$.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \\ & 0 \leq t < \infty \\ u(x,0) = \varphi_i(x) \\ |u(x,t)| \leq M \end{cases}$$

$|u_1(x0) - u_2(x)| \leq \varepsilon$

Тогда $|u_1(x,0) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon$

Док-во: $v = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$\Rightarrow v_t = a^2 v_{xx}$

$v(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$; $|v(x,t)| \leq M$

аналогично предыдущему, но

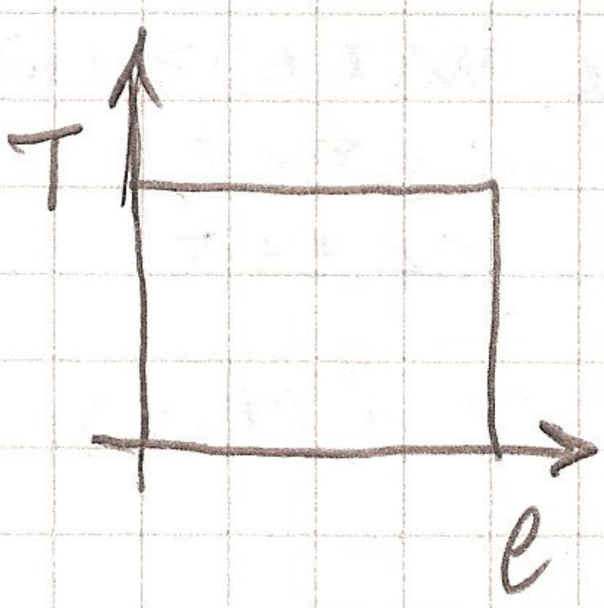
$$W(x,t) = \frac{M}{e^2}(x^2 + 2a^2 t) + \varepsilon.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

ТЗ: Задача III не может иметь

два решения

Доказательство: аналогично ТЗ, но



ТБ: $i = 1,2$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi_i(x) \\ u(0,t) = \mu_i(x) \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \varepsilon$

$|\mu_1(x) - \mu_2(x)| \le \varepsilon$

Тогда $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$.

17.10.

§3 Задача Коши для ур-ния теплопроводности

$$\text{II}\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ |u(x,t)| \le m \end{cases}$$

п.1. Вспомогательная задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ |u(x,t)| \le m \\ u(x,t) = X(x)\,T(t) \end{cases}, \quad u(x,t) \not\equiv 0.$$

$$\Rightarrow \quad T'X = a^2 TX''$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \quad \text{– разделение переменных}$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ |X(x)| \le m_1 \\ X(x) \not\equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ |T(x)| \le m_2 \\ T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$\lambda = k^2 \ge 0$, $0 \le k < \infty$

e^{ikx}, e^{-ikx} $\Rightarrow$ e^{ikx}, $-\infty < k < \infty$

$$T(t) = Ae^{-k^2a^2t}.$$

$$\Rightarrow \quad Ae^{ikx - k^2a^2t} \qquad -\infty < k < \infty.$$

↑ все решения волновательных задач

№2. Решение задачи Коши.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx - k^2a^2t} dk \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk = \varphi(x)$$

$$A(k) = \varphi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx \qquad (2)$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - k^2a^2t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\xi} \varphi(\xi) d\xi \right) dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2a^2t + ik(x-\xi)} dk$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi \qquad (3)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2a^2t + ik(x-\xi)} dk \qquad (4)$$

Вычислим интеграл (4):

$$-k^2a^2t + ik(x-\xi) = -\left(k^2a^2t + 2ka\sqrt{t} \cdot \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} \right) = -\left(ka\sqrt{t} + i\,\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}\right)^2 -$$

$$-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}$$

$$\Rightarrow G(x,\xi,t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ka\sqrt{t} - i\frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}\right)^2} dk$$

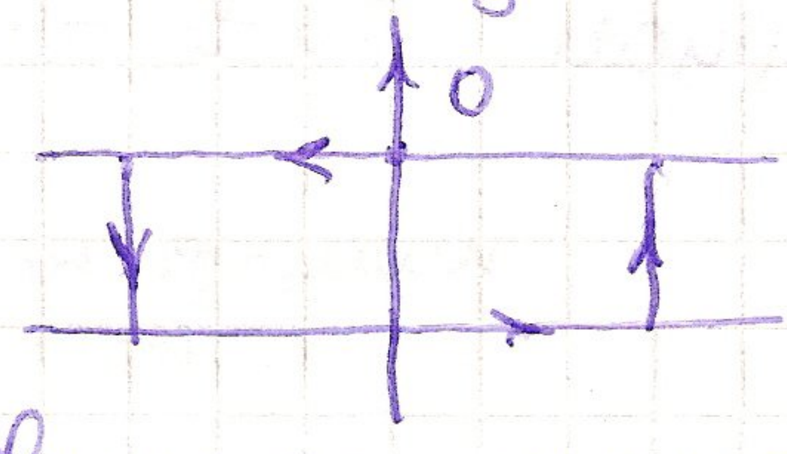
$$s = ka\sqrt{t} - i\frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}$$

$$dk = \frac{ds}{a\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow G(x,\xi,t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty - i\frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty - i\frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds$$

↑ инт-е по прямой параллельной действ. оси.

$\Rightarrow$ воспользуемся т. Коши для аналитических ф-ий



$\Rightarrow$ интеграл по единичной прямой равен интегралу по действ. оси.

$$\Rightarrow G(x,\xi,t) = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \frac{1}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

$t > 0$

№3 Ф-я влияния сосредоточенного источника тепла

Свойства ф-ии G:

1. $G(x, \xi, t)$ определена при $t > 0$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t)\, dx = 1.$$

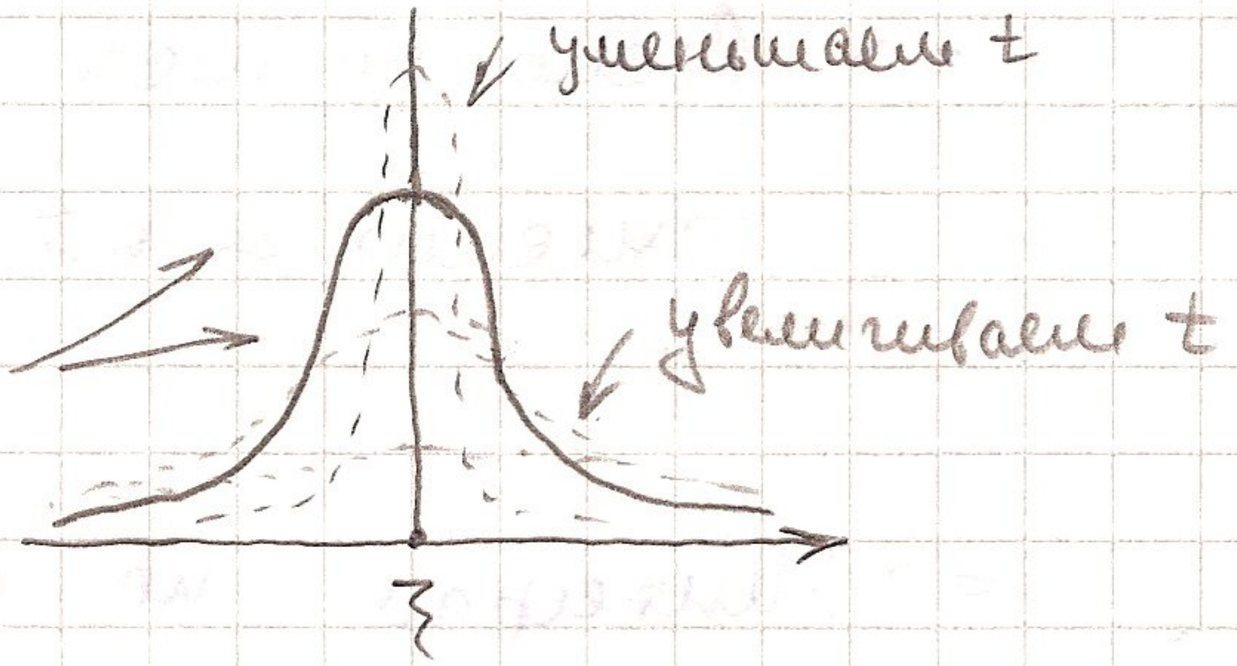
Доп-ло:

$$\frac{x - \xi}{2a\sqrt{t}} = s \qquad dx = ds \cdot 2a\sqrt{t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t)\, dx = \frac{2a\sqrt{t}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = 1.$$

Фиксируем ξ и t =>

площадь не меняется



При $t \to \infty$ получим 0.

При $t \to 0$ получим δ-ф-ю

Если G рассм. как температуру, то такое энергии будет равен ср. 1.

п4. Теорема существования

Если ф-я $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена, то ф-ии (3) и (4) дают решение задачи Коши II.

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (5)$$

Введем в (3) замену переменных:

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = s \Rightarrow \xi = x + s\,2a\sqrt{t}\,; \; d\xi = 2a\sqrt{t}\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \varphi(x + s\cdot 2a\sqrt{t})\,ds \quad (6)$$

$\Rightarrow$ Если в ф-ле (6) положить $t = 0$, то

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow$ ф-ия непрерывна перехода

$\varphi(x)$ – ограничена $\Rightarrow$ по признаку

Вейерштрасса интеграл сх-ся равномерно

$\Rightarrow$ осталось д-ть дифференцируемость ф-ла под знаком интеграла

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial t}(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2}\,\frac{1}{2a\sqrt{\pi}\,t^{5/2}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{s^2}{t} \right) e^{-s^2} \varphi(x + s \cdot 2a\sqrt{t}) \, ds$$

$$\left| \frac{s^2 - \frac{1}{2}}{t} e^{-s^2} \varphi(x + s \cdot 2a\sqrt{t}) \right| \leq M \frac{s^2 + \frac{1}{2}}{t} e^{-s^2}$$

↑ самое маленькое функциональное значение

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса интеграл сх-ся равн. $\Rightarrow$ можно диф-ть по t.

для диф-я по x аналогично

Вывод:

1 Решение ур-ния теплопроводности имеет представление вида ряда

2 $\varphi(x)$ отлично от нуля на $[x_1, x_2]$ и равно 0 вне его.

$\Rightarrow$ получим решения, которые распространяются с бесконечной скоростью, сам рассм. т x вне отрезка $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow$ нарушен принцип с конечной

3. непрерывная зависимость решения от начальных условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi_1(x) \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \varepsilon$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

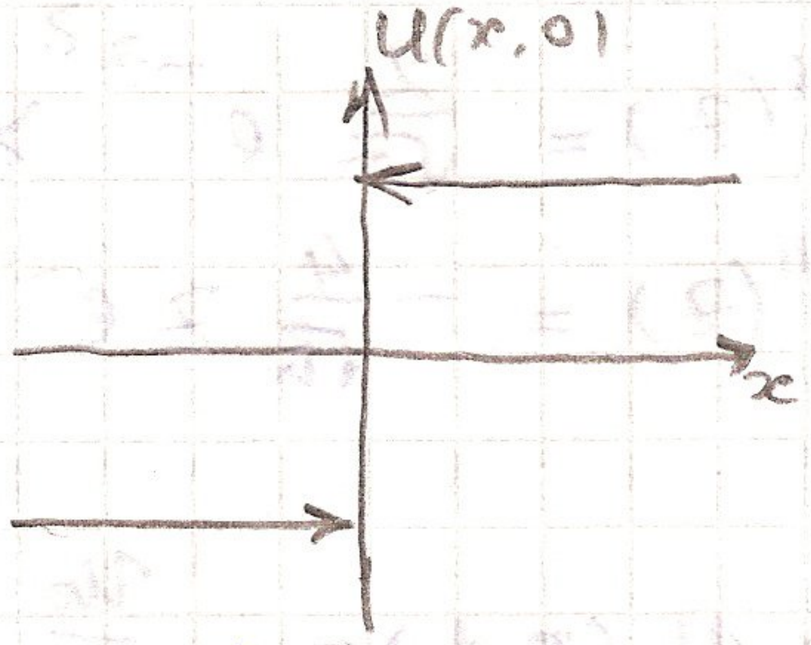
$$V(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$V(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi \Rightarrow |V(x,t)| \le \varepsilon$$

4. Задача с начальными разрывными условиями $\Rightarrow$ требуем, чтобы $u(x,t)$ при $t=0$ была непр в этих непрерывности $\varphi(x)$ и ограничена в окр. точек разрыва (разрыв 1 го рода)

24.10

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} -u_0, & x<0 \\ u_0, & x \ge 0 \end{cases} \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$



$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\,d\xi =$$

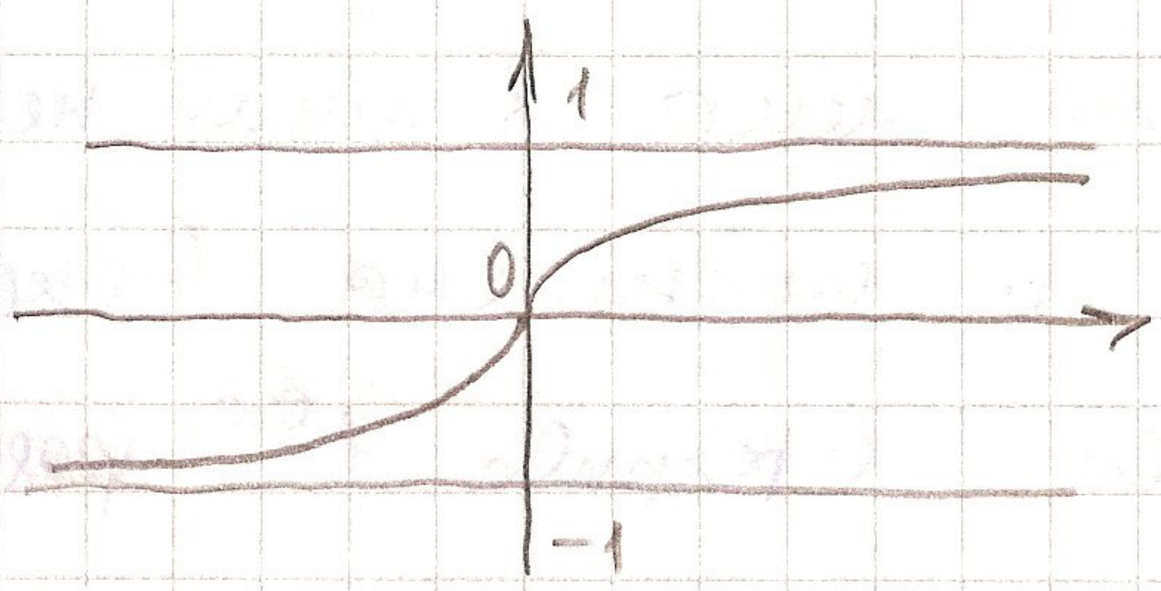
$$= -u_0 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2at}} d\xi + u_0 \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2at}} d\xi$$

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = s \Rightarrow \xi = s \cdot 2a\sqrt{t} + x$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds +$$

$$+ \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds \quad \leftarrow \text{функция Лапласа}$$
$$\text{erf}(z)$$



$$\Phi'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} > 0$$

$$\Phi''(z) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} z e^{-z^2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -\frac{u_0}{2}\left(\Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + 1\right) +$$

$$+ \frac{u_0}{2}\left(1 - \Phi\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) =$$

$$= -\frac{u_0}{2}\left(-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + 1\right) + \frac{u_0}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right) =$$

$$= u_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Если $t \to 0$ и $x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} \to +\infty$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to 1 \Rightarrow u(x,t) \to u_0$

$x < 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} \to -\infty$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \to -1 \Rightarrow u(x,t) \to -u_0$

$x = 0 \Rightarrow \frac{x}{2a\sqrt{t}} = 0$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0.$

§4 Решение задач для ур-ния теплопроводности на полуограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = \mu(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $u = u_1 + u_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = 0 \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \\ |u_1(x,t)| \le M_1 \end{cases}$$

↑ можно решить с помощью нечетного продолжения

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(0,t) = \mu(t) \\ u_2(x,0) = 0 \\ |u_2(x,t)| \le M_2 \end{cases}$$

Рассм. набор тестовых задач:
(принцип Дюамеля)

①

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \mu(t) = 1 \\ u(x,0) = 0 \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$V(x,t) = 1 - u(x,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} \\ V(0,t) = 0 \\ V(x,0) = 1 \\ |V(x,t)| \le M \end{cases}$$

$\Rightarrow$ можно продолжить

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} \\ V(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \\ |V(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = U(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \frac{-x}{4a t^{3/2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\pi}\,2a\,t^{3/2}}\; e^{\frac{-x^2}{4a^2t}}$$

при $t \to 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \to 0$

все следующие производные в 0 равны 0.

②. $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_0 \\ 1 & t_0 < t \end{cases} \\ u(x,0) = 0 \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t_0 \\ U(x, t-t_0), & t > t_0 \end{cases}$$

Если фундаментальное: $U(x,t) = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

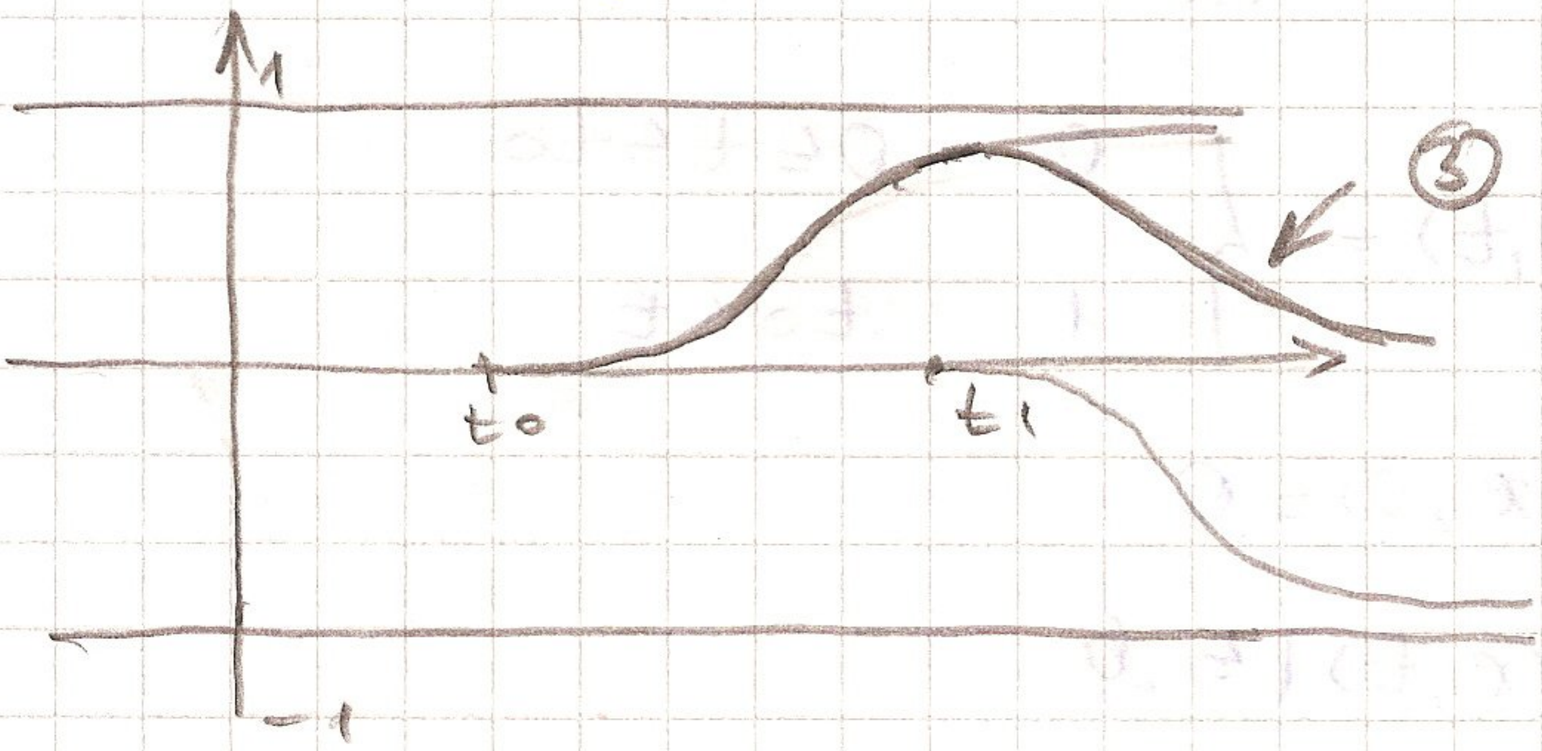
$$\Rightarrow u(x,t) = U(x, t-t_0)$$

③ $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le t_0 \\ M & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 \le t \end{cases} \\ u(x,0) = 0 \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ ← единичная ф-я

$$\Rightarrow u(0,t) = \eta(t-t_0) - \eta(t-t_1)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \mu(U(x,t-t_0) - U(x,t-t_1))$$



④ $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$$

$$\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n$$

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(U(x, t-t_{i-1}) - U(x, t-t_i) \right)$$

по ф-ле Лагранжа:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-t_i^*)\Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$$

↑ получился интегральная сумма

(5)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t^2} \\ u(0,t) = \mu(t) \\ u(x,0) = 0 \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\mu(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)d\tau .$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \qquad 0<t, \; 0<x<e \\ u(0,t) = \mu(t) \\ u(e,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ сначала решим для $u(0,t) = 1$
и запишем решение как $U(x,t)$
$\Rightarrow$ а затем воспользуемся полученной формулой.

(аналогично интегралу Пуассона для решения ур-ния колебаний)

$$\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} = s^2 \Rightarrow t-\tau = \frac{x^2}{4a^2 s^2}$$

$$\tau = t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}$$

$$\Rightarrow d\tau = \frac{2x^2}{4a^2 s^3} ds$$

$$u(x,t) = \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{8a^3 s^3 x}{x^3 2a\sqrt{\pi}} \frac{2x^2}{4a^2 s^3} e^{-s^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}\right) ds =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}\right) ds$$

Пример:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 1 \\ u(x,0) = 0 \\ |u(x,t)| \le M \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) =$$

$$= V(x,t)$$

§5 Задача для уравнения теплопроводности на отрезке

I
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

п.1 Вспомогательная задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ u(x,t) = X(x)T(t) \\ u(x,t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$T'X = a^2 TX''$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \\ X(x) \not\equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \qquad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t}$$

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

31.10

№2 Решение задачи I.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{an}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{\ell} \quad (1)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow C_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx \quad (2)$$

Замечание: при $n \to \infty$ $u(x,t) \to 0$

Начиная ряда стремится к 0 с разной скоростью.

$$u(x,t) = e^{-\left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2 t}\left\{C_1 \sin\frac{\pi x}{\ell} + C_2 e^{-3\left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{2\pi x}{\ell} + C_3 e^{-8\left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{3\pi x}{\ell} + \ldots\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) \approx C_1 e^{-\left(\frac{a\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi x}{\ell}$$

(спустя некоторое время после начала процесса большинство гармоник будет пренебрежимо малым)

$$C_1 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{\pi x}{\ell}\,dx$$

Такая схема процесса называется регулярным режимом.

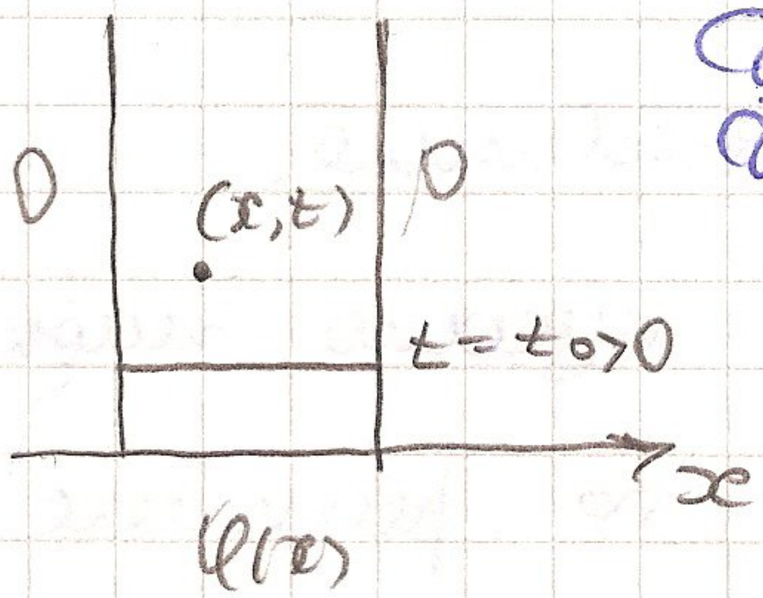
№3. Теорема существования.

Если $\varphi(x)$ – непр., кусочно-гладкая и $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, то решение задачи I существует и дается ф-лами (1) – (2).

Док-во: надо д-ть, что 1-е, определяющее ряд, опр. и непр. в $0 \le x \le \ell$, $0 \le t < \infty$ и выполняются граничные и начальные условия. ← это следует из условия на φ-ю $\varphi(x)$, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| < \infty$, а этот числовой ряд является мажорантой для функционального ряда $\Rightarrow$ по пр. Вейерштрасса $\overset{\text{равн.}}{\Rightarrow}$ сх-ть функционального ряда.

Наличие и единственность условия линейного автомата.

Надо д-ть, что ф-е удовлетворяет ур-нию; ф-е выполняет начальное усл-е.



$$\frac{\partial u}{\partial t} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n a}{e}\right)^2 h^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{e}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{e}$$

Рассм $\tau(x,t)$, начиная с $t=t_0$

$$\Rightarrow |a_n| \le \frac{2}{e}\int_0^e |\varphi(x)|\,dx$$

$\Rightarrow$ построим мажоранту: для $\frac{\partial u}{\partial t} \to$:

$$\left(\frac{\pi a}{e}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{e}\right)^2 t_0}$$

$\uparrow$ зак числовой ряд сх-ся

$\Rightarrow$ функциональный ряд сх-ся равн

при $t \ge t_0 > 0$

$\Rightarrow$ для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ аналогично

$\Rightarrow$ полное фор-е Бернулли

$\Rightarrow \exists \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow$ ур-ние

выполняется.

ЗУ

№4 Ф-я влияния сосредоточенного источника тепла.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi \right) \sin \frac{\pi n x}{\ell} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} =$$

$$= \int_0^{\ell} \left(\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \right) \varphi(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^{\ell} G(x,\xi,t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \quad (3),$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \quad (4)$$

Ряд (4) явно в элементарных ф-ях проинтегрировать нельзя

№5. Редукция общей задачи.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(\ell,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Будем искать решение задачи в виде $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = u_2(\ell,t) = 0 \\ u_1(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u_2(0,t) = u_2(\ell,t) = 0 \\ u_2(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ u_3(0,t) = \psi_1(t) \\ u_3(\ell,t) = 0 \\ u_3(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_4}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} \\ u_4(0,t) = 0 \\ u_4(\ell,t) = \psi_2(t) \\ u_4(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n x}{\ell},$$

где $f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} u_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 u_n = f_n(t) \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau$$

Из u_2 можно найти с помощью принципа Дюгамеля:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ u_3(0,t) = \ell \qquad u_3(\ell,t) = 0 \\ u_3(x,0) = 0 \end{cases}$$

Далее $u_3(x,t) = (\ell - \frac{x}{\ell}) - V(x,t)$

$\Rightarrow$ получаем однородное ур-ние теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V(0,t) = 0 \qquad V(\ell,t) = 0 \\ V(x,0) = 1 - \frac{x}{\ell} \end{cases}$$

← эту задачу мы решали ранее

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t} \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx \quad (2)$$

$$a_n = -\frac{2}{\ell}\,\frac{\ell}{\pi n}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\Big|_0^{\ell} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{1}{\ell}\right)\int_0^{\ell}\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx = \quad \int_0^{\ell} = 0$$

$$= \frac{2}{\pi n}$$

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{\ell}\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{\ell}\right)^2 t}$$

$$\Rightarrow u_3 = \left(1-\frac{x}{\ell}\right) - V(x,t) = U(x,t)$$

принцип Дюамеля

$\Rightarrow$ решение u_3 в общем виде

$$\Rightarrow \boxed{u_3(x,t) = \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu_1(\tau)\,d\tau}$$

07.11

Глава 4 Уравнения эллиптического типа

Уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

↗

Линейная стационарная процесс.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z)$$

§1 Некоторые задачи, приводящие к уравнению Лапласа и Пуассона.

(n1) Стационарные задачи теплопроводности и диффузии

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t) \Rightarrow$ если процесс стационарный $\Rightarrow \Delta u = -\frac{1}{a^2} f(x,y,z)$

2) Потенциальное течение несжимаемой жидкости

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ – ур-ние непр.

Жидкость несжимаема $\Rightarrow \rho = \text{const} = \rho_0$

$\Rightarrow$ $\underline{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0}$

Если течение потенциально, то $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$,

тогда $\Delta u = 0$ ← ур-ние Лапласа

(п2.) Уравнение электростатики:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \text{ где } \rho - \text{объемная плотность заряда}$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ - материальное ур-ние

$\Rightarrow E = -\operatorname{grad} u$

$\Rightarrow D = -\varepsilon \operatorname{grad} u$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho$

Если среда однородна, т.е. ε не зависит от координат, то

$\Delta u = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$ ← ур-ние Пуассона

§2 Интегральная теорема Грина.

(п1.) Решение уравнения Лапласа, зависящее только от радиуса:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Если рассм. решения, зависящие только от радиуса, то ур-ние примет вид.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$x = z \cos\varphi \sin\theta$

$y = z \sin\varphi \sin\theta$

$z = z \cos\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \cancel{\frac{1}{z^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)}^{0} + \cancel{\frac{1}{z^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}^{0} = 0$$

, т.к зависимость только от радиуса

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{du}{dz}\right) = 0 \Rightarrow z^2 \frac{du}{dz} = C$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dz} = \frac{C}{z^2}$$

$$\Rightarrow u(z) = -\frac{C}{z} + C_1 \text{ – общее решение}$$

$u_1(z) = 1$ $u_2(z) = \frac{1}{z}$ – гасящее решение

↑

фундаментальное решение ур-ния Лапласа

($u_2(z)$ потенциал точечного заряда, помещенного в начало координат)

Двумерный случай:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(2\frac{du}{dz}\right)=0$$

$$\Rightarrow 2\frac{du}{dz}=C$$

$$\Rightarrow \quad u=C\ln z+C_1$$

$u_1 = f(z) = 1$ $\qquad$ $u_2(z) = -\ln z = \ln\frac{1}{z}$

↑ фундаментальное решение ур-ния Лапласа в двумерном случае

($u_2(z)$ – потенциал двумерного точечного заряда)

(№2) Формулы Грина

Формула Остроградского

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

↑ единичная внешняя нормаль

$\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$$\Rightarrow \iiint_T \operatorname{div} \vec{A}\, d\tau = \iint_S (\vec{A}\cdot\vec{n})\, ds$$

Предположения:

- P, Q, R имеют непр. и ограниченные производные в открытой области
- K, Q, P непр в замкнутой области
- гладкость S

Рассм скалярные u и v

$$P = v\frac{\partial u}{\partial x},\ Q = v\frac{\partial u}{\partial y},\ K = v\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\iiint_T \{ \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + v\Delta u \}\, d\tau =$$

$$= \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$ — 1ая формула Грина

1ая формула Грина доказана.

- v - непр в замкнутой обл
- u - непр в замкнутой обл вместе со своими первыми производными
- производные ∂u и непр и огр. в открытой области (причем для v это первые производные, а для u вторые)

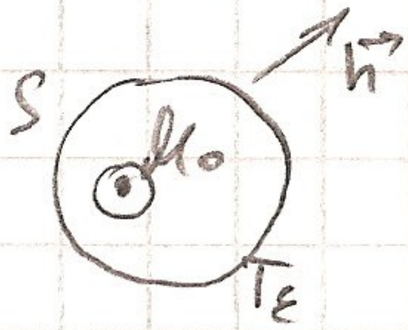
Поменяем ф-ии u и v ролями:

$$\iiint_T v \,\mathrm{grad}\, u \,\mathrm{grad}\, v + u \Delta v \} d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

Теперь вычтем из предыдущего ф-ии:

$$\iiint_T \{ v \Delta u - u \Delta v \} d\tau = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds -$$

$- 2^{\text{ой}}$ формула Грина



$$v = \frac{1}{r_{M_0 M}}$$

Запишем $2^{\text{ую}}$ ф-лу Грина для $v = \frac{1}{r_{M_0 M}}$

вырежем T_{M_0} с помощью небольшого шара радиуса $\varepsilon \Rightarrow$ получим область T_ε

T_{M_0} фиксе, а координаты T_{M_0} — параметры

$0, т.к.$ v - удовлетворяет ур-нию Лапласа

$$\iiint_{T_\varepsilon} (v \Delta u - u \Delta v) d\tau = \iint_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds +$$

$$+ \iint_{S_{M_0}^\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

Устремим $\varepsilon \to 0$:

$$\left| \iint\limits_{S_{M_0}^{\varepsilon}} \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n}(M)\, dS_M \right| \le M \iint\limits_{S_{M_0}^{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon}\, ds = M \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

↑ мажорируется $\frac{\partial u}{\partial n}$

$$\iint\limits_{S_{M_0}^{\varepsilon}} u \frac{1}{\varepsilon^2}\, ds = u(M^*) \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 \to 4\pi u(M_0) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

← можем, т.к. гармоническая по Ляпунову

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_{M_0}^{\varepsilon}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \to 4\pi u(M_0)$$

$$\iiint\limits_{T_\varepsilon} v \Delta u\, d\tau \to \iiint\limits_{T} \frac{1}{r_{MM}} \Delta u(M)\, d\tau_M$$

↑ несобственный интеграл

$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left\{ \frac{1}{r_{M_0 M}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{M_0 M}}\right) \right\} ds_M - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{T} \frac{1}{r_{M_0 M}} \Delta u(M)\, d\tau_M$$ — 3-я формула Грина

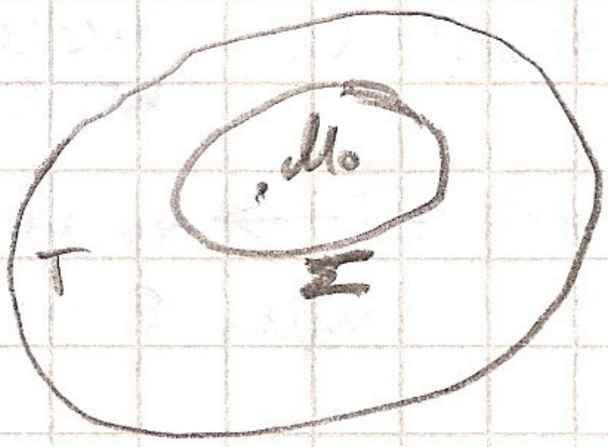
(основная формула Грина, формула Грина)

§3 Свойства гармонических функций

Т1: Если ф-я $u(M)$ гармонична в обл. T, то она имеет в этой обл. гасине производные любого порядка

Док-во:

u – гармонична $\overset{def}{\Rightarrow} \Delta u = 0$



По формуле Грина:

Т.к M – гармонична, то $\Delta u(M) = 0$

$$\Rightarrow u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) \right) dS_M$$

$\Rightarrow$ интеграл можно дифф-ть любое число раз.

Т2: Если ф-я u гармоническая в обл T, то $\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}(M)\, dS_M = 0$ (поток через замкнутую поверхность $= 0$)

Док-во: 1ая формула Грина для T_Σ, $v = 1$

$$\Rightarrow \iiint_{T_\Sigma} \Delta u \, d\tau = \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds \qquad \Rightarrow \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

0, т.к u-гармоническая $\qquad$ ну

Следствие: Если u - гарм. в обл $\overline{T}$ и

непр

имеет непр. частные производные вплоть

до границ, то $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$.

Т. о средних 3: Если u гарм. в обл T, то

$\forall M_0 \quad u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{M_0}^a} u(M) ds$

Док-во: По формуле Грина:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{M_0}^a} \left\{ \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M) \frac{\partial}{\partial n_K}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) \right\} dS_M =$$

$S_{M_0}^a$ $\quad$ $=$ $\quad$ $\frac{1}{a}$ $\quad$ $\cdot$ $\quad$ 0 ну T_2 $\quad$ $+ \frac{u(M)}{r^2_{M_0M}}$

a

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{M_0}^a} u(M) \, dS_M$$

ур

Т4 (принцип максимального и минимального значения): Если u гарм. в обл T-ар и непр в замкнутой обл $T+S$, то она достиг своего наибольшего и наименьшего значения на границе обл. S 85

поверхности S.

Док-во: u непр $\Rightarrow$ $\exists$ наиб. и наим. значения

$\exists\ u(M_0) = M \geq u(M)$, где M_0 – внутр от.

Рассм сферу, лежащую внутри T, с центром в M_0

$u(M_\varepsilon) = M - \varepsilon$

Внутри шар с центром M_1: $u(M) \leq M - \varepsilon/2$

О.Б поверхность пересечения Σ_1, а

внешняя поверхность ~~шаровая~~ шара Σ_2

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} u(M)\,ds = \iint\limits_{\Sigma_1} u(M)\,ds + \iint\limits_{\Sigma_2} u(M)\,ds$$

$$(M - \varepsilon/2)\sigma_1 + M'\sigma_2 = M(\sigma_1+\sigma_2) - \frac{\varepsilon}{2}\sigma_1$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} u(M)\,ds \leq M \cdot 4\pi a^2 - \frac{\varepsilon}{2}\sigma_1 = M\cdot 4\pi a^2$$

по Т3. ↑ ✗

$\Rightarrow$ на всей сфере значение $u(M) = M$.

$\Rightarrow$ можно рать до границы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists$ точка на границе, где $u(M)$

принимает наибольшее значение

Св. 1: u_1 и u_2 - гарм. в T и

непр. на $T+\xi$ и $u_1(x) \le u_2(x)|_\xi$, то

$u_1(x) \le u_2(x)$ во всех обл. T

Св 2: $|u_1(x) \le u_2(x)|_\xi \Rightarrow |u_1(x)| \le u_2(x)$

во всех обл. T.

21.11

Ур-ния эллиптического типа:

$\Delta u = 0$ - ур-ние Лапласа

$\Delta u = -f$ - ур-ние Пуассона

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$n=1$ $\Delta u = 0$, $u = u(x) = C_1 x + C_2$.

$n=2$ $\Delta u = 0$ $u = A + B_1 x + B_2 y + C_1(x^2 - y^2) +$

$+ C_2 xy + \sum_i P_{3i}(x,y) + \dots$

Задачи, приводящие к ур-ниям эллиптического типа:

① Стационарная теплопроводность

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F$$

если $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, то $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -F$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-F$$

$k = \text{const} = k_0$

$\Rightarrow \Delta u = -f$, где $f = \frac{F}{k_0}$

$\Delta u = -f$, внутри объема T, ограниченного

(1) поверхностью Σ

$u|_\Sigma = f_1$ – 1ая краевая задача

(задача Дирихле)

Пример $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_\Sigma = 1 \end{cases}$ $\quad u = \begin{cases} 2, & M(x,y,z) \in T \\ 1, & M \in \Sigma \end{cases}$ ← разрывна

$\Rightarrow$ необходимо наложить доп. условия:

$u \in C^2(T) \cap C(T \cup \Sigma)$

$\Sigma = \partial T$, $T \cup \partial T = \overline{T}$

$\Rightarrow u \in C^2(T) \cap C(\overline{T})$

$\Rightarrow$ необходимое условие разрешимости:

$f, f_1 \in C(\overline{T})$

Замечание 1: можно ослабить понятие решения на случай разрывных условий, т.е. f и f_1 – кусочно-непр, тогда нужно

потребовал, чтоб и она непр. в точках непр f_1, а в остальных точках ограничена

Замечание 2: предполагается, что поверхность обладает нужной гладкостью

(2) $\begin{cases} \Delta u = -f \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = f_2 \end{cases}$ Задача Неймана

↑ поток

$u \in C^2_{\text{кус}}(T) \cap C^1(\overline{T})$

(3) $\begin{cases} \Delta u = -f \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3)\right|_\Sigma = 0 \end{cases}$ 3-ья краевая задача

↑ Теплообмен

$u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$

② потенциальное течение жидкости.

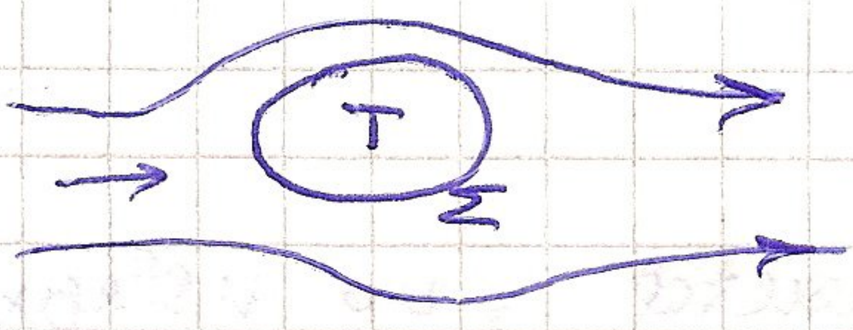
$\rho = \rho_0 = \text{const}$

Ур-ние неразрывности $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$

нет отсутствуют вихри $\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = -\operatorname{grad} \varphi$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 0$ вне T



$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$

↑ жидкость не протекает в трещины

$\left.\vec{v}\right|_{x\to+\infty} = \vec{v_0}$

↑ условие бесконечности

$\Rightarrow \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=+\infty} = v_0$

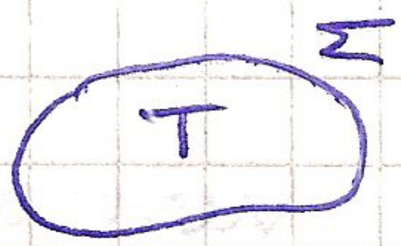
В реальных ситуациях $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{\omega} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ проблема турбулентности

③ Уравнение электростатики

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho & \text{- ур-ние Максвелла} \\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0 & \text{- нет зависимости от времени} \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$



$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho & \text{в } T \\ \varphi|_{\Sigma} = f & \text{- задан потенциал} \end{cases}$

↓ ра основная задача электростатики

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi\big|_z = 2005 \end{cases}$$ внутри металлической камеры

↑ const

$\Rightarrow \varphi = 2005$ - решение $\Rightarrow \vec{E} = 0$

Запись оператора Лапласа

в других системах координат.

цилиндрическая система координат

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

сферическая система координат

$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} u$$

↑ радиальная часть ↑ угловая часть

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$$

↑ в цилиндрических

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

Общее решение ур-ния Лапласа, зависящее от радиуса.

① $n=2 \quad u=u(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} r\frac{du}{dr}=C_1 \\ r\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r} \Rightarrow u(r)=C_1\ln r+C_2$$

$$\Rightarrow u(r)=\ln\frac{1}{r}$$ — фундаментальное решение ур-ния Лапласа на плоскости

↑ потенциал точки

② $n=3 \quad u=u(r)$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}(ru)=0 \Rightarrow ru=C_1 r+C_2 \qquad r\neq 0.$$

$$\Rightarrow u(r)=C_1+\frac{C_2}{r}$$

$$\Rightarrow u(r)=\frac{1}{r}$$ — фундаментальное решение ур-ния Лапласа в пр-ве

↑ потенциал точечного заряда

Формулы Грина

Пусть $u, v \in C^1(\overline{T}) \cap C^2(T)$

I ф-ла Грина $\iiint\limits_T u \Delta v \, d\tau = \iint\limits_\Sigma u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma -$

$$- \iiint\limits_T (\nabla u \nabla v) \, d\tau$$

II ф-ла Грина $\iiint\limits_T (u \Delta v - v \Delta u) \, d\tau =$

$$= \iint\limits_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

III ф-ла Грина $4\pi u(M_0) =$

$$= - \iint\limits_\Sigma u \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) d\sigma + \iint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n_P} \frac{1}{R_{M_0 P}} d\sigma -$$

$$- \iiint\limits_T \frac{\Delta u}{R_{M M_0}} \, d\tau$$

Если u – гармоническая ф-я, т.е. $\Delta u = 0$

тогда $u(M_0) = - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma u \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) d\sigma +$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n_P} \frac{1}{R_{M_0 P}} \, d\sigma$$

Решение ур-ния Лапласа в полярных координатах.

$u = u(r, \varphi)$ $\quad \Delta u = 0$ $\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

Метод разделения переменных: $u = k(r)\,\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dk}{dr}\right)\Phi + \frac{1}{r^2}k\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} + r\frac{(rk')'}{k} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

Если $\varphi \in [0, 2\pi]$, то ставятся усл. периодичности:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad \forall \varphi.$$

если задана ГУ в полярных и на границах заданы однородные ГУ, то ставятся однородные условия.

$$\begin{cases} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad \forall \varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

1) $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi_0 = 1$

2) $\lambda > 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,2\pi + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,2\pi \\ c_1 = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,2\pi - c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,2\pi + c_2(\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi - 1) = 0 \\ c_1 (1 - \cos\sqrt{\lambda}\,2\pi) + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,2\pi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ определитель равен $0 \Rightarrow$

$$\Delta = \sin^2\sqrt{\lambda}\,2\pi + (1 - \cos\sqrt{\lambda}\,2\pi)^2 = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\cdot 2\pi = 2\pi n \Rightarrow \lambda_n = n^2$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_n^{(1)} = \cos n\varphi \\ \varphi_n^{(2)} = \sin n\varphi \end{cases}$$

$\Uparrow$

одному собств значению соот две собств ф-ии — явление вырождения

если $\lambda = 0 \Rightarrow (rR')' = 0 \Rightarrow R(r) = a_0 + b_0 \ln r$

если $\lambda = n^2 \Rightarrow r\dfrac{(rR')'}{R} - n^2 = 0$

ур-ние Эйлера $\rightarrow$ $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$

Ищем реш. в виде $R(z) = z^\mu$

$$\mu(\mu-1)r^{\mu} + \mu r^{\mu} - n^2 r^{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \mu^2 - \mu + \mu - n^2 = 0 \Rightarrow \mu = n \vee \mu = -n$$

$$\Rightarrow \quad R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

$\Rightarrow$ общее решение ур-ния Лапласа в полярных координатах имеет следующий вид:

$$u = u(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$$

или

$$u = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right]$$

Если решается внутренняя задача для круга $r \le a$ $u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$,

т.к $u \in C(r \le a)$

Если решается внешняя задача $r > a$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$, то на бесконечности нужно накладывать условие.

в двумерном случае: ограниченность
в пространственном случае: равномерное

стремление решения к 0.

т.к. $|u| < M$, то $b_0 = 0$, $a_n, b_n = 0$

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (a_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi)$$

3) Если решение задано в кольце $a < r < b$, то берется полное решение и для определения коэф. раскладывание в ряд Фурье 4 ти на внешней и внутр. границе кольца

Для внешней и внутренней задач решение можно свернуть и получить ф-лу Пуассона

Ф-ла Пуассона для внутренней задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < a \\ u|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi)\, d\psi$$

Аналитическая ф-я имеет место и для внешней задачи Дирихле:

Исследование краевых задач для ур-ния Лапласа

1) Задача Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad в \ T \\ u|_\Sigma = g(P) \end{cases}$$

Т единственности: задача Дирихле имеет единственное решение

Док-во (от противного): u_1, u_2 - решения

$$\delta = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\delta = 0 \\ \delta|_\Sigma = 0 \end{cases}$$

в силу принципа максимума

$$\Rightarrow \delta \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

Т устойчивости: если $|g(P)| < \varepsilon$, то $|u| < \varepsilon$.

Док-во: Из принципа максимума следует, что внутри T: $|u| < \max|u|_\Sigma < \varepsilon$

Ур-ние Лапласа - это ур-ние

Эйлера для $F = \iiint\limits_T (\nabla u)^2 d\tau$

$\Rightarrow$ решение ур-ния Лапласа сводится

к минимизации этого функционала

Предполь сво ур-ние Лапласа к

Шестрановому ур-нию.

$\Delta u = f(u)$ имеет больше одного решения

2) задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = g(p) \end{cases}$$

Необходимое условие разрешимости

задачи Неймана: $\iint\limits_\Sigma g(p)\, d\sigma = 0.$

Это следует из свойств гармонических ф-ий.

Замечание: Если решение задачи

Неймана для ур-ния Пуассона

$\begin{cases} \Delta u = -f, & \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = g \end{cases}$, то

решение разрешимости:

$v=1$ $$\iiint_T \nabla u \cdot \nabla v \, d\tau = \iint_\Sigma v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_T (\nabla u \cdot \nabla v) d\tau$$

$$\Rightarrow \iiint_T f \, d\tau + \iint_\Sigma g \, d\sigma = 0$$

Это условие является и достаточным.

28.11

§3 Математическая постановка задач для ур-ния Лапласа.

x, y, z – пространственные переменные

– ур-ние Лапласа решается в конус-то области,

форма области может быть достаточно сложной.

– решение ур-ния Лапласа удовлетворяет дополнительным усл. на границе обл.

↙ внутренние задачи (реш. внутри области)

↘ внешние задачи (вне области)

п1 Внутренние задачи для ур-ния Лапласа

1ая краевая задача (задача Дирихле)

u – опр и непр в замкнутой обл. и на границе

$$\Delta u = 0 \text{ в } T$$

$$u(M)\big|_S = f(M)$$

Предыдущая внутренняя задача Дирихле не может иметь два решения.

Док-во: u_1, u_2 – реш

$v = u_1 - u_2$

$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } T \\ v|_S = 0 \end{cases} \Rightarrow$ принцип макс. и мин. значений

$\Rightarrow v \equiv 0.$

что

Т (о непр. зависимости реш.):

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 \quad \text{в } T \\ u_i|_S = f_i(M) \end{cases} \quad i = 1,2$$

$$|f_1(M) - f_2(M)|_S < \varepsilon$$

Тогда решения этих задач $|u_1(M) - u_2(M)| \le \varepsilon$ в T.

Док-во: $v(M) = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{в } T \\ v_2(M)|_S = f_1(M) - f_2(M) \end{cases}$$

$|v(M)|_S \le \varepsilon \overset{\text{ан.}}{\Rightarrow} |v(M)| \le \varepsilon$ в T

что

2^ая краевая задача (задача Неймана)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad в \ T \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(M)\Big|_S = f(M) \end{cases}$$

1. Необх. усл. существования задачи Неймана $\iint\limits_S f(M)\,dS = 0$

2. Если задача разрешима, то решение не единственно.

Т1 Пусть φ-я u_1 - реш. задачи Неймана, тогда u_2 - реш. тоже задачи Неймана необх и дост., тогда $u_2 = u_1 + C$.

Доп-во: $\Rightarrow$ $v = u_1 + u_2$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \quad в \ T \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(M)\Big|_S = 0 \end{cases}$$

1^ая ф-ла Грина ($u = v$):

$$\iiint\limits_T (v\Delta v + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v)\,d\tau = \iint\limits_S v\frac{\partial v}{\partial n}\,dS$$

0 0

$\Rightarrow \operatorname{grad} v = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \ \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow v = const$ ч.т.д. $\Leftarrow$ очевидно. ч.т.д.

№2. Внешние задачи. Для ур-ния Лапласа

Сфера единичного радиуса:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x > 1 \\ u|_{x=1} = 1 \end{cases}$$

Решения:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{2}$$

$u = \alpha u_1 + (1-\alpha) u_2$ – однопараметрическое семейство решений.

Можно ввести предположение, что $u_\infty \to 0$, то скорее всего остается только $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T \\ u(M)|_S = f(M) \\ u(M) \rightrightarrows 0 \text{ – равн. отн. всех направлений} \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$, $R(\varepsilon)$: $|u(M)|\Big|_{S_{R(\varepsilon)}} \le \varepsilon$

T (единственность): не может быть двух разных решений.

Док-во: $u_1, u_2 \Rightarrow v = u_1 - u_2$

$\Delta v = 0$ в T, $v(M)|_S = 0$, $v(M) \rightrightarrows 0$

пусть $M_0 \in T$ $\quad v(M_0) = A > 0$

$$\varepsilon = \frac{A}{2}$$

$\Rightarrow$ для обл. огр внутри S, а снаружи S_R

$\Rightarrow$ по принципу макс и мин. и ~~только~~ не может быть $A \Rightarrow \not\in$

$\Rightarrow$ единственна $\Rightarrow y$

T (цепь реш): $\begin{cases} \Delta u_i = 0 & \text{в } T \\ u_i(M)\big|_S = f_i(M) \\ u_i(M) \rightrightarrows 0 \end{cases}$

$|f_1(M) - f_2(M)| \le \varepsilon$

Тогда $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$.

Доказ: аналогично предыдущему

$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad z > 1 \\ u\big|_{z=1} = 1 \end{cases}$ $\quad u_1 = 1$, $\quad u_2 = 1 + \ln z$

$\Rightarrow$ решения $\to 0$ не

Тогда устремим ε к нулю

$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T \\ u(M)\big|_S = f(M) \\ |u(M)| \le A \end{cases}$

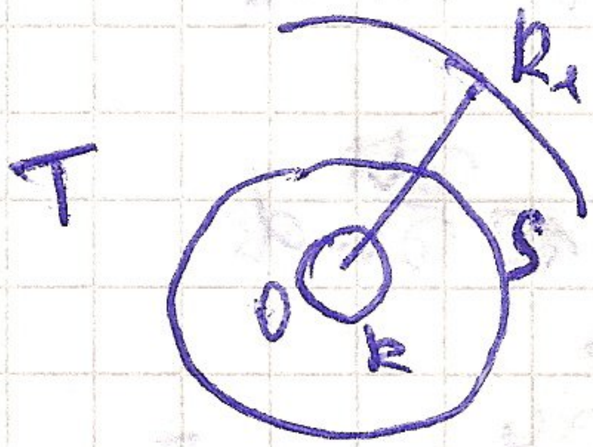
Т (единственность) + внешняя задача в двумерном решении, не может иметь 2 решения.

Доп-во: u_1, A_1

u_2, A_2

$v = u_1 - u_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v(u)|_\Sigma = 0 \\ |v(u)| \le A \end{cases}$$



Введем $w = A \dfrac{\ln \frac{2M}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}}$

Если $M \in \Sigma \Rightarrow w(u)|_\Sigma > 0$

$w(u)|_\Sigma > v(u)|_\Sigma = 0$

$w(u)|_{\Sigma_{R_1}} = A$

$w(u)|_{\Sigma_{R_1}} \ge |v(u)|_{\Sigma_{R_1}}$

$\Rightarrow w(u)$ - мажоранта для $v(u)$ в области вне Ω.

$|v(u)| \le w(u)$

Устремим $R_1 \to \infty \Rightarrow w(u) \to 0$

$\Rightarrow v(u) \equiv 0$ чтд

Внешняя задача Неймана

$$|u(M)| \le \frac{A}{z}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{z^2} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{z^2} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{z^2}$$

Также д-я наз. что рецидивна на бесконечности

Для них ф-ла ф-ла Грина справедлива для неограниченных областей:

$$\iiint_{T_z} (v\Delta u + \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u)\, d\tau = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds +$$

$$+ \iint_{S_z} v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$v \frac{\partial u}{\partial n} = v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right]$$

$$\Rightarrow \left|v \frac{\partial u}{\partial n}\right| \le 3A^2 \cdot \frac{1}{z^3}$$

$$\Rightarrow \left|\iint_{S_z} v \frac{\partial u}{\partial n} ds\right| \le 3A^2 \frac{1}{z^3} \cdot 4\pi z^2 =$$

$$= \frac{12\pi A^2}{z} \to 0 \text{ при } z \to \infty$$

$$\operatorname{grad} v \operatorname{grad} u = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$|\operatorname{grad} v \operatorname{grad} u| \le \frac{3A}{z^4}$$

$$\iiint_{T_z} (\operatorname{grad} v \operatorname{grad} u)\, d\tau \to \iiint_T (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v)\, d\tau$$

$\Rightarrow \iiint\limits_{T_2} \sigma \Delta u \, d\tau$ тоже имеет предел при $\varepsilon \to \infty$

$\Rightarrow \iiint\limits_{T} (\sigma \Delta u + \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u) \, d\tau = \iint\limits_{S} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$

Обозначим ϕ-ю фундаментального анализа.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad в \ T \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = f(M) \\ u(M) - \text{регулярная} \end{cases}$$

T (единственна) внешняя задача Неймана не может иметь двух разных решений.

Доказ-во: u_1 и u_2 – решения

$$\partial z = u_1 - u_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta \partial = 0 \\ \frac{\partial \partial}{\partial n}\Big|_S = 0 \\ \partial(M) - \text{регулярная в } \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ для Грина $\Rightarrow \iiint\limits_{T} (\partial \Delta \partial + \operatorname{grad}^2 \partial) \, d\tau =$

$= \iint\limits_{S} \partial \frac{\partial \partial}{\partial n} ds$ (из регулярности)

$\| 0$

$\Rightarrow \quad \nu \equiv 0$

Внешняя задача Неймана имеет

ν_g

обоих недостатков внутренней задачи.

Методы решения :

1 Метод разделения переменных

2 Метод Δ Грина

3 Метод конформных отображений

4 Метод потенциалов

5 Вариационный метр

6 Метр конечных разностей

$1^{ого}$ метод используется только для простых областей

$3^{ий}$ метр для двумерных областей с использованием аналитических f-ий

$5^{ого}$ метод : найти $\min F[u] = \iiint_T \text{grad}^2 u \, d\tau$

$u(M)|_S = f(M)$

Вариационные задачи могут быть хорошим решением численно (особенно если сложная обл.)

6-ой метод – основной численный метод

§4 Метод разделения переменных. 05.12

Выбираем такую систему координат, в которой граница обл. во всех координатных линиях / поверхностях.

При разделении переменных в полярных координатах.

$$u_0(z) = A_0 \ln z + B_0$$

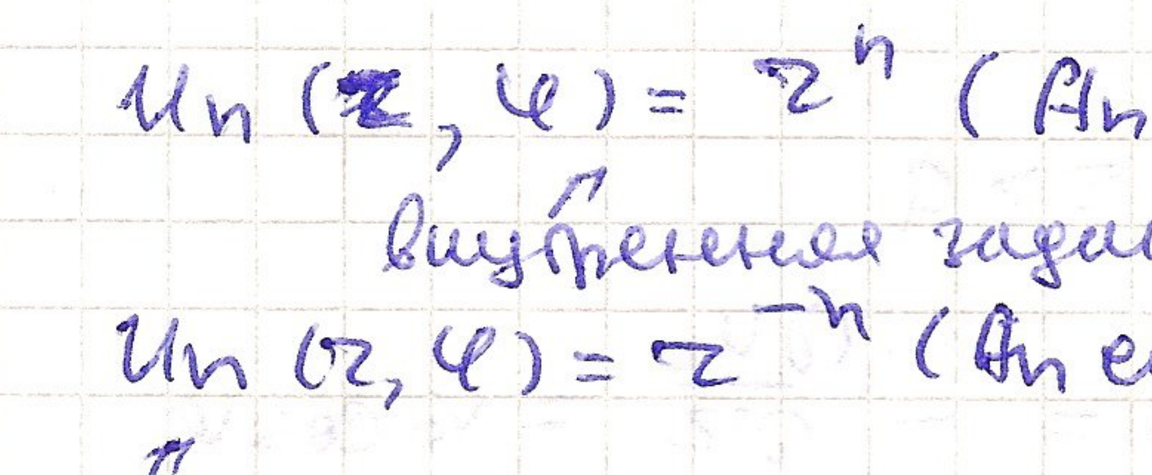
$$u_n(z, \varphi) = z^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

внутренняя задача

$$u_n(z, \varphi) = z^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

внешняя задача

Задача об обтекании цилиндра:



$\vec{V}_0 = 4V_0, 0, 0$

Будем искать u: $\vec{v} = -\text{grad}\, u$

$$u_0 = -v_0 x = -v_0 z\cos\varphi.$$

$$\Delta u = 0 \qquad z > a$$

Скорость может иметь только тангенциальную составляющую: $\frac{\partial u}{\partial z}(a,\varphi) = 0$

$$\text{grad}(u - u_0) \to 0 \text{ при } z \to \infty$$

$$u(z,\varphi) = u_0(z,\varphi) + W(z,\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta W = 0 & z > a \\ \frac{\partial W}{\partial z}(a,\varphi) = -\frac{\partial u_0}{\partial z} = v_0\cos\varphi \\ \text{grad}\, W \xrightarrow[z\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$W(z,\varphi) = A_0 \ln z + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$\Rightarrow$ необх. удовлетворить граничному усл.

$$\frac{\partial W}{\partial z}(a,\varphi) = \frac{A_0}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) n \frac{1}{a} = v_0 \cos\varphi$$

$\Rightarrow$ $A_n = 0$ $\quad n = 0, 2, 3 \ldots$

$B_n = 0$ $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$A_1 = -V_0 a$

$$\boxed{w(z, \varphi) = B_0 - V_0 \frac{a^2}{z} \cos\varphi}$$

B_0 не интересует, т.к. ищем grad ψ

$$\Rightarrow u(z, \varphi) = B_0 - V_0 \left(z + \frac{a^2}{z}\right) \cos\varphi$$

$$V_z = -\frac{\partial u}{\partial z}(z, \varphi) = V_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \cos\varphi$$

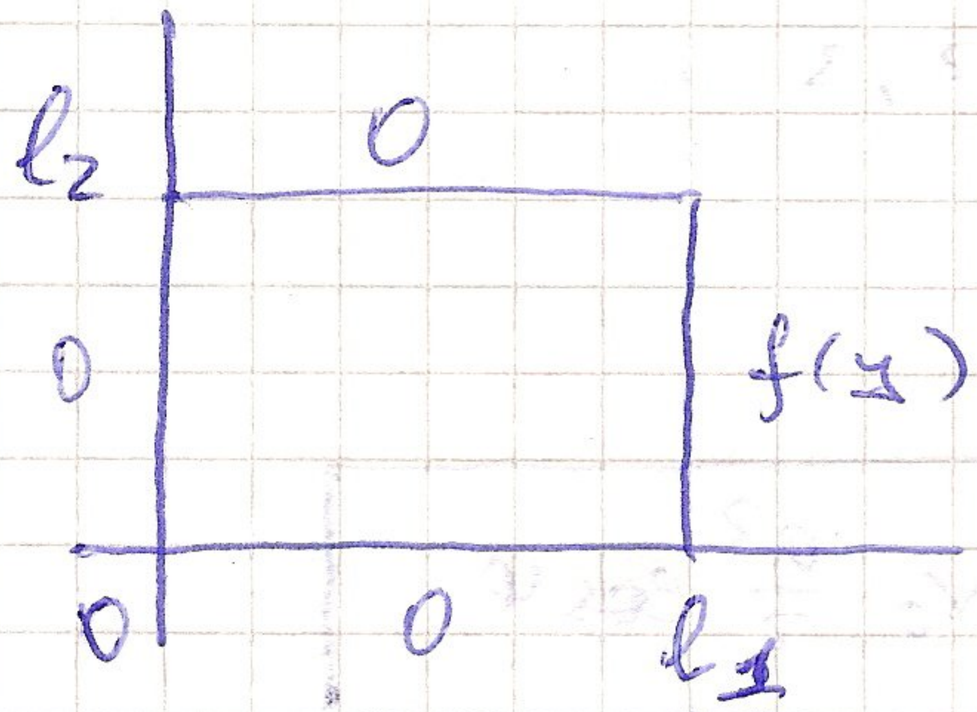
$\Rightarrow V_z(a, \varphi) = 0$ (что это и требовалось)

$$V_\varphi = -\frac{1}{z}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -V_0 \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right) \sin\varphi$$

$V_\varphi(0) = V_\varphi(\pi) = 0$ при $z = a$

$V_\varphi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \mp 2V_0$ при $z = a$

Решение задачи для прямоугольника:



$$\Delta u = 0$$

$$u(0,y) = 0$$

$$u(l_2,y) = 1$$

$$u(x,0) = u(x,l_1) = 0$$

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Вспомогательная задача:

$$\Rightarrow \begin{cases} X''Y + XY'' = 0 \\ \dfrac{X''}{X} = -\dfrac{Y''}{Y} = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y(0) = 0,\ X(l_1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(l_2) = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = A\operatorname{ch}\frac{\pi n}{l_2}x + B\operatorname{sh}\frac{\pi n}{l_2}x \qquad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n l_1}{l_2}} \qquad Y = Y_n = \sin\frac{\pi n y}{l_2}$$

$$\Rightarrow u_n(x,y) = C_n\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n x}{l_2}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n l_1}{l_2}}\sin\frac{\pi n y}{l_2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n x}{l_2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n l_1}{l_2}} \sin\frac{\pi n y}{l_2}$$

Пусть надо решить задачу Дирихле:

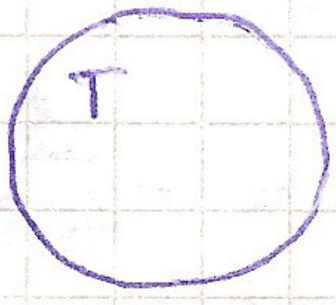
$$\Rightarrow u(l_1,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n y}{l_2} = f(y)$$

$$C_n = f_n = \frac{2}{l_2}\int_0^{l_2} f(y)\sin\frac{\pi n y}{l_2}\,dy$$

Аналогично решается задача для прямоугольного параллелепипеда.

§5 Метод ф-ии Грина. 13.02

п1 Определение ф-ии Грина
Представление решения задачи Дирихле через ф-ию Грина



$$\Delta u = 0 \quad \text{в } T$$

$$u(M)\big|_S = f(M)$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right\} dS_M$$

↑

решение можно получить, т.к

$\frac{\partial u}{\partial n}$ и u на границе

одновременно неизвестны.

Рассм $\Delta V = 0$

$$\iiint_T (V\underbrace{\Delta u}_{0} - u\underbrace{\Delta V}_{0})\,d\tau = \iint_S \left(V\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \iint_S \left\{ V\frac{\partial u}{\partial n}(M) - u(M)\frac{\partial}{\partial n}V \right\} d\sigma_M$$

$\Rightarrow$ сложим ф-ю ф-л

$$\Rightarrow \quad u(M_0) = \iint_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(M)\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + V\right) - \right.$$

$$\left. - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + V\right) \right\} d\sigma_M$$

Подберем V так, чтоб $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + V = 0$

ф-я Грина: $G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + V(M_0, M)$

где $\Delta_M V = 0$, $V(M_0, M)\Big|_{M\in S} = -\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\Big|_{M\in S}$

$$\Rightarrow u(M_0) = -\iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M)\, u(M)\, d\sigma_M$$

Но! Здесь нельзя 4-го Гильо нужно решить задачу Дирихле. Правда, получается, что вся совокупность задач Дирихле сводится к единственной задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta_M G(M_0, M) = 0 & \text{при } M \neq M_0 \\ G(M_0, M) \approx \dfrac{1}{4\pi r_{M_0 M}} & \text{при } M \to M_0 \\ G(M_0, M)\Big|_{M \in S} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Если решение задачи Дирихле существует, то оно единственно.

В двумерном случае:

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} + V(M_0, M)$$

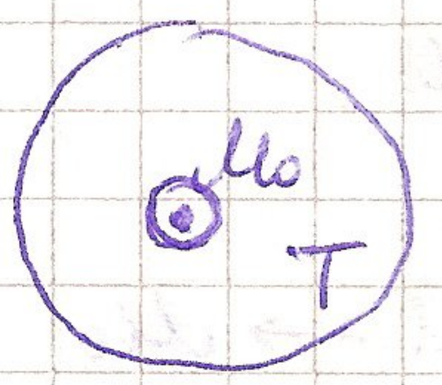
где $\Delta_M V(M_0, M) = 0$

$$V(M_0, M)\Big|_{M \in S} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}}\Big|_{M \in S}$$

$$\Rightarrow u(M_0) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M)\, u(M)\, dS_M$$

№2 Св-ва ф-ии Грина.

① $G(M_0, M) \geq 0$



Окружим т M_0 сферой малого радиуса ε

$S_{M_0}^{\varepsilon}$

в области T \ сфера радиуса ε ф-я Грина Гармонична, на границе ее T ф-я Грина равна 0.

На сфере $S_{M_0}^{\varepsilon}$: $\frac{1}{4\pi\varepsilon} \to +\infty$

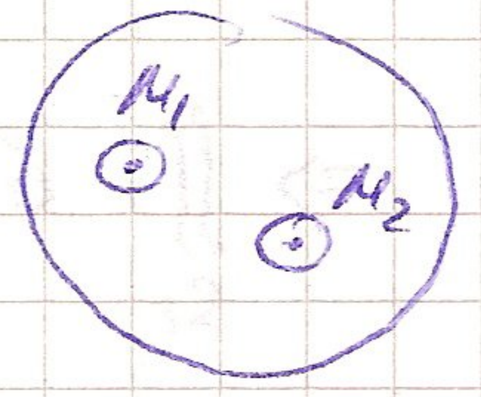
$\Rightarrow$ может сфера ф-я Грина положительна.

$\Rightarrow$ по принципу минимального значения $\Rightarrow$ ф-я Грина положительна

② $G(M_0, M) = G(M, M_0)$

Рассм $u(M) = G(M_1, M)$

$v(M) = G(M_2, M)$



2 ая 4-ка Грина $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_{T_\varepsilon} (v\Delta u - u\Delta v)\,dT =$$

$$= \iint_{S+S_1+S_2} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS_M$$

$$\iint_{S_1} \left(G(M_2, M)\frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) - G(M_1, M)\frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)\right) dS +$$

$$+ \iint_{S_2} \left(G(M_2, M)\frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) - G(M_1, M)\frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)\right) dS$$

$= 0.$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \cdot \; - \iint_{S_1} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} + W(M_1, M)\right)\frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M)\,dS_M =$$

$$= -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} + W(M_1, M^*)\right)\frac{\partial G}{\partial n}(M_2, M^*)\,4\pi\varepsilon^2 \longrightarrow$$

$\longrightarrow 0$ при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial W}{\partial n}(M_1, M)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_\varepsilon} G(M_2, M) \frac{\partial G}{\partial n}(M_1, M)\, dS =$$

$$= G(M_2, M^*)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial W}{\partial n}(M_1, M^*)\right) \cdot 4\pi\varepsilon^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow G(M_2, M_1)$$

$$\iint_{S_\varepsilon} \longmapsto -G(M_1, M_2)$$

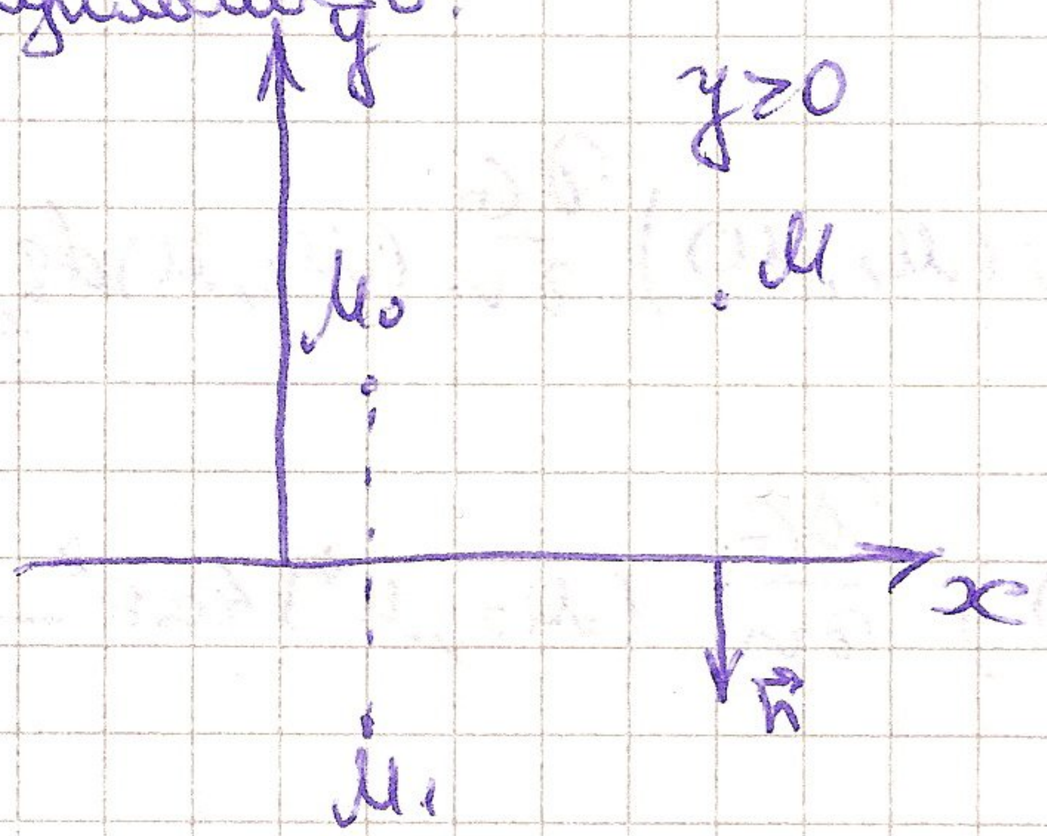
$$\Rightarrow G(M_2, M_1) - G(M_1, M_2) = 0$$

$$\Rightarrow G(M_2, M_1) = G(M_1, M_2)$$

25р

п 3. 4-е Грина для полупространства и полупространства.

Полупространство:



$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + V(M_0, M)$$

Возьмем:

$$V(M_0, M) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_1, M}}$$

$$\Rightarrow G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_1, M}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{M_1 M}}{r_{M_0 M}} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^2_{M_1, M}}{r^2_{M_0 M}}$$

$M_0 = \{x, y\} \quad y > 0$

$\Rightarrow M_1 = \{x, -y\}$

$M = \{\xi, \eta\} \quad \eta > 0$

$$\Rightarrow G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n}(x, y, \xi, \eta) f(\xi) \, d\xi =$$

$$= \int_S \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta = 0} f(\xi) \, d\xi$$

$$u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{2(y+\eta)}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} - \frac{2(\eta - y)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right\} \Big|_{\eta = 0} d\xi$$

Интеграл Пуассона

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi)\, d\xi =$$

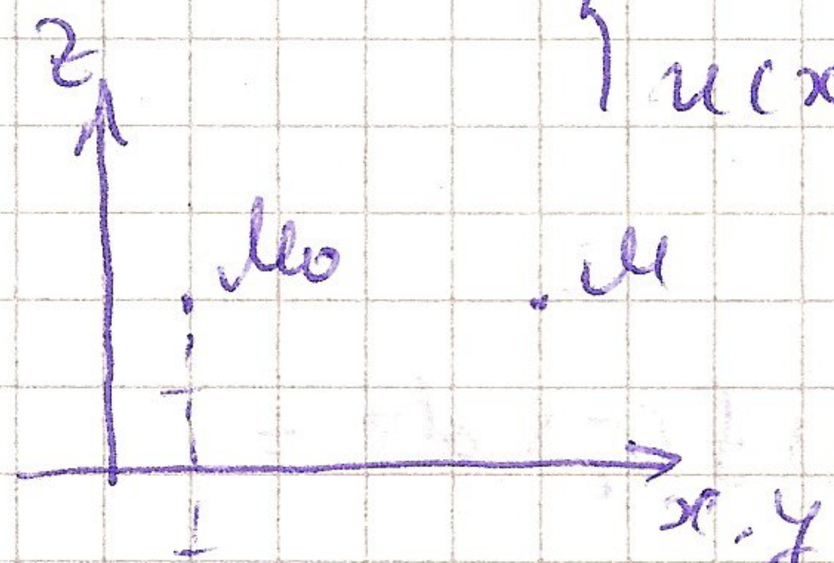
$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi)\, d\xi \quad (=)$$

$$\frac{\xi - x}{y} = t \qquad \xi = x + ty \qquad d\xi = dt \cdot y$$

$$(=) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+ty)\,dt}{(1+t^2)} \longrightarrow f(x) \quad \text{при } y \to 0$$

Полуплоскость:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & z > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \end{cases}$$



$$G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi r_{M_0 M}} - \frac{1}{4\pi r_{M_1 M}}$$

$M_0 = \{x, y, z\}$

$M_1 = \{x, y, -z\}$

$M = \{\xi, \eta, \zeta\}$

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right\}$$

$$u(x,y,z) = \iint_S \frac{\partial G}{\partial n}(M_0, M)\, f(M)\, d\sigma_M =$$

$$= \iint_S \frac{\partial G}{\partial \zeta}(M_0, M)\Big|_{\zeta=0} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\Big|_{\zeta=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{2(z-\zeta)}{2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(z+\zeta)}{2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\right\}\Big|_{\zeta=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$u(x,y,z) \underset{z\to 0}{=} f(x,y)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & y>0 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi-x}{y} = t \\ \xi = x+ty, \; d\xi = y\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= 1.$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{x}{y}}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$$

27.02

§ Метод конформных отображений (только для двумерных случаев)

п.1 Инвариантность вида уравнения при конформных отображениях.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases} \qquad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

$T \rightleftarrows T_1$ $\quad f(z)$ $\quad f'(z) \neq 0$

аналитическая ф-я

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$ ← усл. Коши-Римана

$$\Rightarrow \quad \Delta\xi = 0 \qquad \Delta\eta = 0$$

$$\lambda = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 =$$

$$= |f'(z)|^2 \neq 0$$

$$u(x,y) = U(\xi,\eta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\underbrace{\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right)} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\underbrace{\left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right)} +$$

из усл Коши-Римана

$$+ \frac{\partial U}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta = 0$$

Будем считать, что преобразование это конформные, т.е выполнены усл Коши-Римана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 =$$

$$= |f'(z)|^2 \qquad f'(z) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta U \cdot |f'(z)|^2$$

$\Rightarrow$ св-во гармоничности сохраняется.

п 2. Решение краевых задач для ур-ния Лапласа с помощью конформных отображений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{в } T \\ u(x,y)\Big|_{\Gamma} = g(x,y) \end{cases}$$

$$T \xrightarrow{f(z)} T_1$$

$$\Gamma \to \Gamma_1$$

$$\xi = \varphi(x,y)$$

$$\eta = \psi(x,y)$$

$$\Delta U = 0 \quad \text{в } T_1$$

$$U(\xi,\eta)\Big|_{\Gamma_1} = G(\xi,\eta)$$

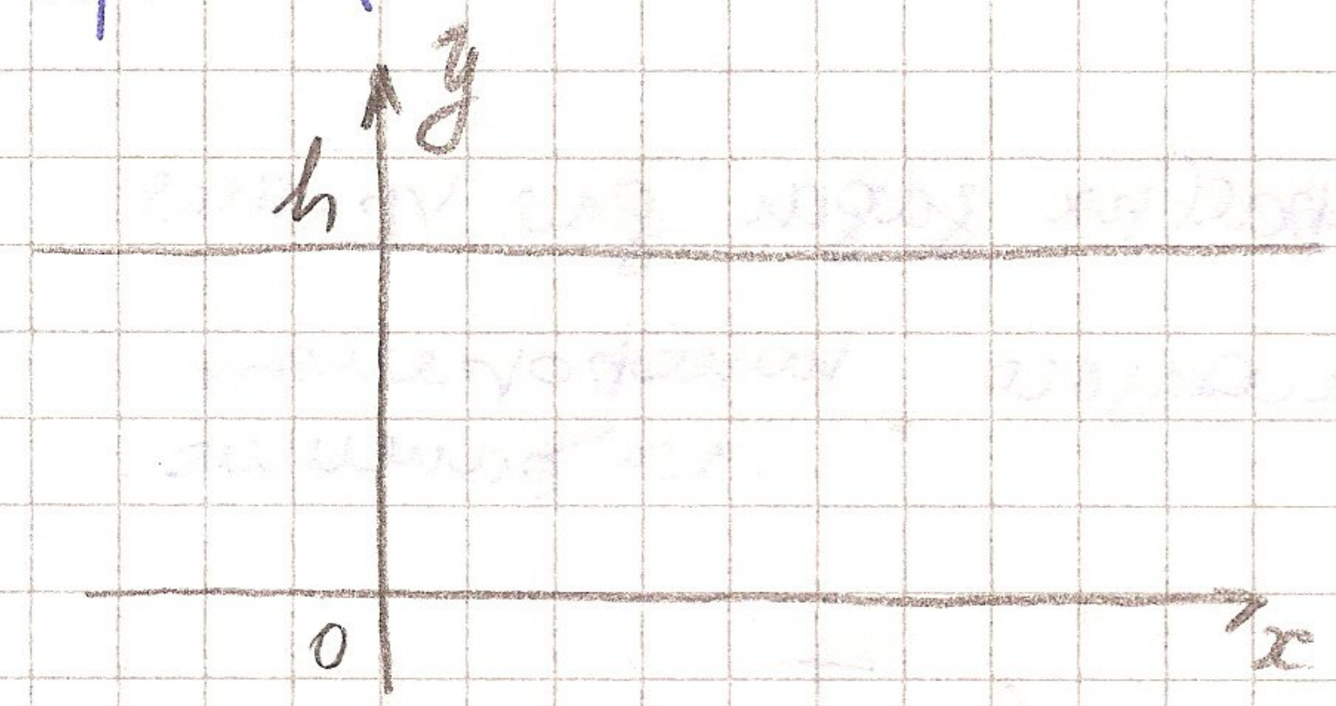
конф. отображение инв. обратимо $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x = \Phi(\xi,\eta)$ и $y = \Psi(\xi,\eta)$ $\Rightarrow$

$$g(x,y) = g(\Phi(\xi,\eta), \Psi(\xi,\eta)) = G(\xi,\eta)$$

Мы свели задачу Дирихле в обл T к задаче Дирихле в обл T_1. Если T_1 кривая или $\overline{T}$, то мы добились односвязного упрощения.

Пример:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad 0 < y < h \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,h) = u_0 \end{cases}$$

$$f(z) = e^{\frac{\pi}{h}z} = e^{\frac{\pi}{h}(x+iy)} = e^{\frac{\pi}{h}x}(\cos\tfrac{\pi}{h}y + i\sin\tfrac{\pi}{h}y)$$

$$\Rightarrow \quad \xi = e^{\frac{\pi}{h}x}\cos\tfrac{\pi}{h}y$$

$$\eta = e^{\frac{\pi}{h}x}\sin\tfrac{\pi}{h}y$$

Прямая $\parallel Ox$ переходит в луч

Если $x = const \Rightarrow$ полуокружность.

Дважды св-т коорд $\rightarrow$ полярную

$\Rightarrow$ отобразили полосу на полуплоскость.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \qquad \eta > 0$$

$$U(\xi, 0) = \begin{cases} 0 & 0 < \xi < \infty \\ u_0 & -\infty < \xi < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(\xi, \eta) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\eta}{(\xi - s)^2 + \eta^2} \cdot ds =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{s - \xi}{\eta} = t \\ s = \xi + t\eta, \; ds = \eta dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} \frac{\eta^2 dt}{\eta^2 t^2 + \eta^2} = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{-\frac{\xi}{\eta}} = \frac{u_0}{\pi} \left(-\operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta} + \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{\xi}{\eta}$$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{\omega}{a} \operatorname{arcctg} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} y = \frac{\omega}{h} y.$

№3 Построение ф-ии Грина с помощью конформных отображений

$\zeta = f(z_0, z)$

$z_0 \longmapsto 0.$

$\Rightarrow G(M_0, M) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z_0, z)|$

$\zeta = -\frac{1}{2\pi} \ln f(z_0, z)$

1. $\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2\pi} \ln f(z_0, z)\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln |f(z_0, z)|$

2. $G(M_0, M) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} \times (z - z_0) \right| =$

$= -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{f(z_0 - z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} \right| -$

$- \frac{1}{2\pi} \ln |z - z_0|$

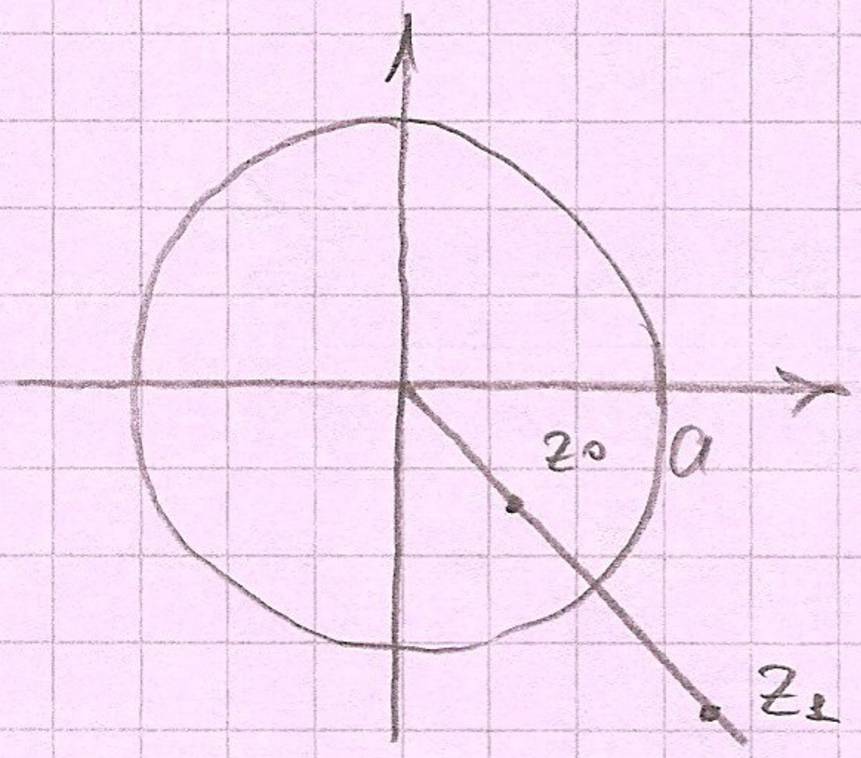
$\downarrow$

$-\frac{1}{2\pi} \ln r_{M_0 M} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{M_0 M}}$

3. $G(M_0, M)\Big|_{M \in \Gamma} = 0$ – очевидно

Пример: Инв радиуса a $\longmapsto$ круг единичного радиуса

при этом $z_0 \longmapsto 0$ (дробно-линейное преобразование)



$|z_0| \cdot |z_1| = a^2$

z_0 и z_1 - сопряженные точки

при $z_0 \longmapsto 0$ $\quad z_1 \longmapsto \infty$

$a \longmapsto 1$

$$f = \frac{z - z_0}{z - z_1} \cdot A$$

$$1 = \frac{a - z_0}{a - z_1} \cdot A \Rightarrow A = \frac{a - z_1}{a - z_0}$$

$$\Rightarrow f = \frac{z - z_0}{z - z_1} \cdot \frac{a - z_1}{a - z_0}$$

$z_0 = \rho e^{i\varphi}$

$z_1 = \frac{a^2}{\rho} e^{i\varphi}$ $\qquad z = \rho e^{i\varphi}$

$$G(M_0,M) = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{|z-z_0|^2\,|a-z_1|^2}{|z-z_1|^2\,|a-z_0|^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{|z-z_1|^2\,|a-z_0|^2}{|z-z_0|^2\,|a-z_1|^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{\rho^2-2\rho\frac{a^2}{z}\cos(\varphi-\psi)+\frac{a^4}{z^2}}{\rho^2-2\rho z\cos(\varphi-\psi)+z^2}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{a^2-2az\cos\varphi+z^2}{a^2-2a\frac{a^2}{z}\cos\varphi+\frac{a^4}{z^2}}\right]^{\frac{z^2}{a^2}} \Leftarrow$$

$$\frac{a^2}{z^2}(z^2-2az\cos\varphi+a^2)$$

$$\Leftarrow \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{\frac{\rho^2z^2}{a^2}-2\rho z\cos(\varphi-\psi)+a^2}{\rho^2-2\rho z\cos(\varphi-\psi)+z^2}\right]$$

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & z<0\\ u(a,\varphi)=f(\varphi)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(z,\varphi) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n}(z,\varphi,\rho,\psi)\Big|_{\rho=a} f(\psi)\,ds \Leftarrow$$

$$ds = a\,d\psi$$

$$\int_0^{2\pi}$$

$$\textcircled{=} -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} a\left\{\frac{\frac{2\rho z^2}{a^2}-2z\cos(\varphi-\psi)}{\frac{\rho^2 z^2}{a^2}-2\rho z\cos(\varphi-\psi)+a^2}-\right.$$

$$-\left.\frac{2\rho-2z\cos(\varphi-\psi)}{\rho^2-2\rho z\cos(\varphi-\psi)+z^2}\right\}\Big|_{\rho=a} f(\psi)\,d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z^2-a^2}{z^2-2za\cos(\varphi-\psi)+a^2} f(\psi)\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-z^2}{z^2-2za\cos(\varphi-\psi)+a^2} f(\psi)\,d\psi$$

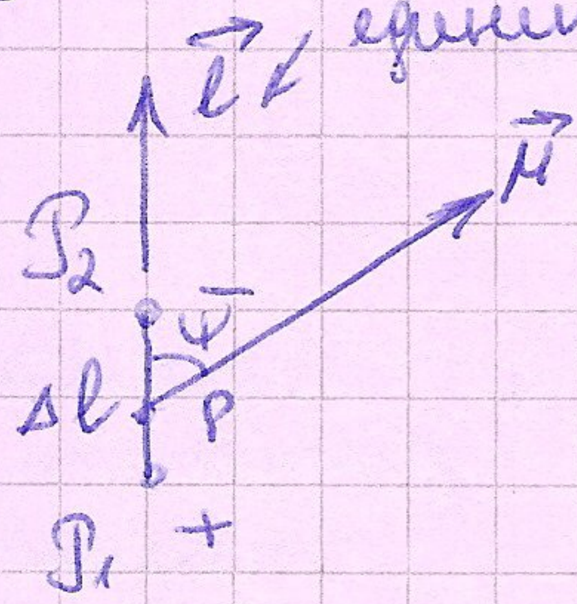
интеграл Пуассона для круга

§7 Потенциал двойного слоя

п.1 Определение потенциала $\frac{k}{r_{PM}}$ двойного слоя

$W(M) =$ — потенциал поля заряда

$\dot{P}$



диполь

$$W(M) = \frac{e}{r_{P_1M}} - \frac{e}{r_{P_2M}} =$$

$$= -e\left(\frac{1}{r_{P_2M}} - \frac{1}{r_{P_1M}}\right) =$$

$$= -\underbrace{e\Delta l}_{\text{дипольный момент}} \frac{\frac{1}{r_{P_2M}} - \frac{1}{r_{P_1M}}}{\Delta l} =$$

$$\textcircled{=} \; -N \frac{\partial}{\partial l_p}\left(\frac{1}{r_{pM}}\right) = -N\,\vec{l}\cdot \operatorname{grad}_p \frac{1}{r_{pM}}$$

$M = \{x, y, z\}$

$p = \{\xi, \eta, \zeta\}$

$$\frac{1}{r_{pM}} = \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r_{pM}}\right) = -\frac{2(\xi-x)}{2\left((\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\right)^{3/2}}$$

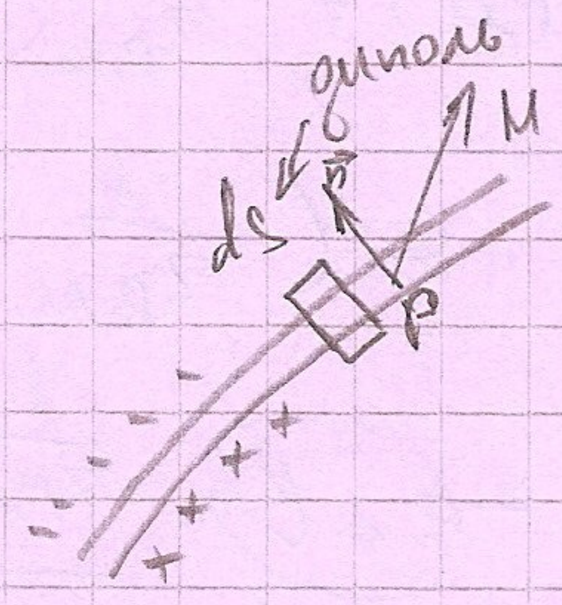
$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r_{pM}} = \frac{(x-\xi)\vec{i} + (y-\eta)\vec{j} + (z-\zeta)\vec{k}}{r_{pM}^3} =$$

$$= \frac{\vec{r}_{pM}}{r_{pM}^3}$$

$$W(M) = -N \frac{(\vec{l}\cdot\vec{r}_{pM})}{r_{pM}^3} =$$

$$= -N \frac{\cos\varphi}{r_{pM}^2} \quad \text{или} \quad = -N \frac{\partial}{\partial l_p}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)$$

Двойной слой:



→ – плоскость дипольных моментов

⇒ дипольный момент $\vec{J}(P)\,dS_p$

$$W(M) = -\iint_S \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)\cdot\mu(P)\,dS_P =$$

$$= -\iint_S \frac{\cos\psi(PM)}{r_{PM}^2}\,\mu(P)\,dS_P =$$

← расположение угол к ψ.

$$= \iint_S \frac{\cos\varphi(P,M)}{r_{PM}^2}\,\mu(P)\,dS_P$$

Назовем потенциалом двойного слоя один из трех интегралов !!!

Если M попадет на поверхность S, то интеграл перестает быть вычислимым; вне S интеграл определен всюду, зависит от параметров непрерывно.

$\Rightarrow \Delta W = 0$ вне S

Потенциал двойного слоя в двумерном случае:

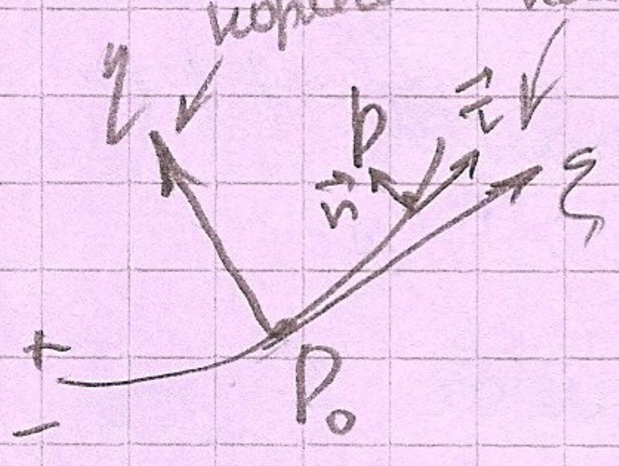
$$W(M) = -\int_S \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{r_{PM}}\right)\mu(P)\,dS_P =$$

$$= -\int_S \frac{\cos\psi(PM)}{r_{PM}}\mu(P)\,dS_P = \int_S \frac{\cos\varphi(PM)}{r_{PM}}\mu(P)\,dS_P$$

№2 Существование потенциала двойного слоя в теории поверхности S.

Если на S задано непрерывное в окр P_0 порядка V_1 а Д - ор и ин-ла, то потенциал двойного слоя существует в данной точке P_0 поверхности

Будем рассм. функцию



По ф-ле Тейлора

$$\eta(\xi) = \eta(0) + \xi\eta'(0) + \frac{1}{2}\xi^2\eta''(\xi_1)$$

($\eta(0) = 0$, $\eta''(0) = 0$)

$$\eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi\eta''(\xi_2)$$

($\eta'(0) = 0$)

единичный вектор касательной в P_0:

$$\vec{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}}, \frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \right\}$$

вектор нормали (внутр) в P_0

$$\vec{n} = \left\{ -\frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \right\}$$

$$\vec{\zeta}_{P_0} = \{-\xi, -\eta(\xi)\}$$

$$(\vec{r}, \vec{r}_{p0}) = \frac{\xi\eta'(\xi) - \eta(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \overset{\text{по 9-ому}}{=} \text{теорема}$$

$$= \frac{\xi^2\eta''(\xi_2) - \frac{1}{2}\xi^2\eta''(\xi_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} = r_{p0}\cdot\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\varphi}{r_{p0}} = \frac{\xi^2\eta''(\xi_2) - \frac{1}{2}\xi^2\eta''(\xi_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}\; r_{p0}^2}$$

$$(\xi^2 + \eta^2(\xi)) \sim \frac{1}{4}\xi^4(\eta''(\xi))^2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\varphi}{r_{p0}} = \frac{\eta''(\xi_2) - \frac{1}{2}\eta''(\xi_1)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}\,(1+\frac{1}{4}(\eta''(\xi_1))^2)}$$

Трибодание подчеркивает существенно,

$r_{p0} \to \infty \quad \cos\varphi \to 0$.

$$\frac{\cos\varphi}{r_{p0}} \longmapsto \frac{1}{2}\eta''(0)$$

№3 Скачок потенциала двойного слоя на поверхности S:

$$W_в(P_0) = W(P_0) + 2\pi\mu(P_0)$$ ← внутренние предельные значения

$$W_н(P_0) = W(P_0) - 2\pi\mu(P_0)$$

* наружное —н—

Пов-ть с опр $\to$ P_0 обладает $2^{вып}$ нормалями наружн, μ – опр и ист-ка + + [illegible] μ – непр в P_0, тогда пр переходе пов-ть в полную имеем

в двухмерном случае

$$W_в(P_0) = W(P_0) + \pi\mu(P_0)$$

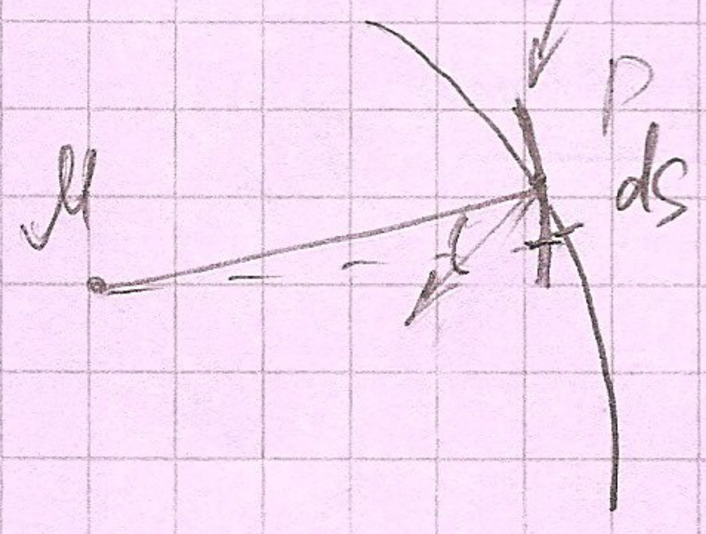
$$W_н(P_0) = W(P_0) - \pi\mu(P_0)$$

Док-во:

1) $\mu = const = \mu_0$

$$W(M) = \mu_0 \int_S \frac{\cos\varphi(n_M)}{r_{PM}} dS_P$$

дуга окр с центром в т. M и нар рад



$\Rightarrow ds \cdot \cos\varphi = d\sigma$

↑ проекция ds на дугу окр

$\Rightarrow \frac{\cos\varphi\, ds}{r_{рад}} = \frac{d\sigma}{r_{рад}}$

↑ угловая мера $d\sigma$ – угол, под которым из т. M видно $d\sigma$ и как следствие ds.

$\Rightarrow$ подынтегральное выражение – угол, под которым видно ds $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если φ – тупой, то будет казаться что видимость, угол, под которым видно всю поверхность, Но! с учетом знаков!

$\Rightarrow$ Если точка M внутри $\Rightarrow$ 2π – замкнутая, а точка

$$W(M) = \begin{cases} 2\pi\,0, & \text{если M вне S} \\ 0, & \text{M вне S} \\ \pi\,0, & \text{если M на S} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ что верно

2) Общий случай

Имеем: $W^0(u) = \varphi(P_0) \int\limits_S \frac{\cos \psi(P,u)}{2\rho_{Pu}} dS_P$

Будем исследовать:

$$\Delta(u) = W(u) - W^0(u) =$$

$$= \int\limits_S \frac{\cos \psi(P,u)}{2\rho_{Pu}} (\varphi(P) - \varphi(P_0)) dS_P.$$

$W^0(u)$ - разрыва из Π

$\Delta(u)$ - непр $\Rightarrow$ $W(u)$ - разрыва

$$\Delta(u) = \int\limits_S F(u,P) f(P) dS_P$$

$\Delta(u)$ сх-ся равн. в $\forall P_0 \in S$, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$ $\left| \int\limits_{S_\delta} F(u,P) f(P) dS_P \right| < \varepsilon$

где $S_\delta \subset K_{P_0}^\delta$

$u \in K_{P_0}^\delta$

06.03

$$|J(M)| \le \int_{S_\delta} \frac{|\cos\psi(M,P)|}{2\pi r} |\vartheta(P) - \vartheta(P_0)| \, dS_P \le$$

$$\le \max |\vartheta(P) - \vartheta(P_0)| \int_{S_\delta} \frac{|\cos\psi(M,P)|}{2\pi\rho} \, dS_P \le$$

$$\le \max |\vartheta(P) - \vartheta(P_0)| \int_{S} \frac{|\cos\psi(M,P)|}{2\pi r} \, dS_P \quad (\le)$$

↑ конечное число

n_0 - наше число тех кружков

чуда с центрами

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi n_0} \cdot 2\pi n_0 = \varepsilon.$$

$\Rightarrow \exists$ непр $\rho = P_0$.

$$W(M) = W^0(M) + J(M)$$

$$W_\beta(P_0) = W_\beta^0(P_0) + J(P_0)$$

$$W^0(P_0) + \pi\vartheta(P_0) + J(P_0)$$

ч.т.д.

Пример: S – круг

$$P = \{\varphi\}$$

$$M = \{r, \theta\}$$

$$\vec{n} = \{-\cos\alpha, -\sin\alpha\}$$

$$\vec{r}_{PM} = \{2\cos\theta - a\cos\alpha,\ 2\sin\theta - a\sin\alpha\}$$

$$(\vec{n}, \vec{r}_{PM}) = a - 2\cos(\theta - \alpha) = r_{PM}\cos\varphi(M,P)$$

$$\frac{\cos\varphi}{r_{PM}} = \frac{(\vec{n}, \vec{r}_{PM})}{r_{PM}^2} = \frac{a - 2\cos(\theta-\alpha)}{a^2 - 2a\cos(\theta-\alpha) + r^2}$$

$$W(M) = \int_0^{2\pi} \frac{a(a - 2\cos(\theta-\alpha))\,\gamma(\rho)}{a^2 - 2a\cos(\theta-\alpha) + r^2}\,d\alpha$$

$$\| \\ W(r,\theta)$$

Пусть $W(a,\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos(\theta-\alpha))\,\gamma(\alpha)}{2a^2(1-\cos(\theta-\alpha))}\,d\alpha =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \gamma(\alpha)\,d\alpha$$

Пусть $\gamma = const = \gamma_0$

$$W(r,\theta) = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r\cos(\theta-\alpha))}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\alpha) + r^2}\, d\alpha \quad (=)$$

$$\alpha - \theta = \beta$$

$$(=) \gamma_0 \int_0^{2\pi} \frac{a(a - r\cos\beta)\, d\beta}{a^2 - 2ar\cos\beta + r^2} = W(r)$$

Если $\gamma = const$, то W от θ не зависит

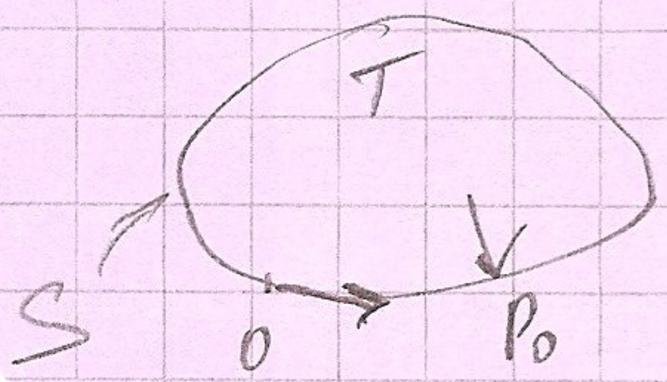
$0 \le r < a$

$r = 0 \quad W(0) = 2\pi\gamma_0$

$r = a \quad W(a) = \pi\gamma_0$

$r > a \quad W(r) = 0$

пл. Сведение задачи Дирихле для Уравнения Лапласа к интегральному Ур-нию Фредгольма 2го рода.



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T \\ u(M)\big|_S = f(M) \end{cases}$$

Будем искать решение в виде:

$$u(M) = W(M) = \int_S \frac{\cos\psi(M,P)}{r_{PM}} \sigma(P)\, dS_P$$

где $\sigma(P)$ наз. плотностью д-я.

$\sigma(P)$ выбирается в зависимости от граничных усл., т.е. ур-ние выполняется автоматически

$$u(P_0)\Big|_S = W_k(P_0)\Big|_S = f(P_0)$$

$$\frac{1}{2}\sigma(P_0) + \int_S \frac{\cos\psi(P,P_0)}{r_{P_0P}} \sigma(P)\, dS = f(P_0)$$

$$\sigma(P_0) + \frac{1}{\pi}\int_S \frac{\cos\psi(P_0,P)}{r_{P_0P}} \sigma(P)\, dS = \frac{1}{\pi} f(P_0)$$

ИУ 1 рода 2 рода

$P \to S$

$P_0 \to S_0$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\cos\psi(P_0,P)}{r_{P_0P}} = K_1(S_0, S)$$

$$\Rightarrow \quad \nu(s_0) + \int_0^\ell k_1(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = \frac{1}{\lambda} f(s_0) \qquad (1)$$

ядро инт. уравнения

$$\Rightarrow \quad \nu(s_0) + \int_0^\ell k_1(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = 0 \qquad (2)^*$$

$$|\nu(\sigma)| \geq |\nu(s)|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \int_0^\ell \frac{\cos\varphi}{z(r,\varphi)}\,ds = \int_0^\ell k_1(s_0, s)\,ds = 1.$$

$$\rightarrow \quad \int_0^\ell \varepsilon k_1(s_0, s)\,(\nu(s_0) + \nu(s))\,ds = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\ell k_1(\sigma, s)\,(\nu(\sigma) + \nu(s))\,ds = 0.$$

$k_1(\sigma,s) \to 0$ — не имеет точек разрыва

$\Rightarrow$ подынтегральная ф-я однозначна

$\Rightarrow$ подынт. функция $= 0$ }

$k_1(\sigma, s) \neq 0$

$\Rightarrow \quad \nu(\sigma) + \nu(s) = 0.$ } $\Rightarrow \nu(s) \equiv 0$

$2\nu(\sigma) = 0$

Если однородное ур-ние имеет тривиальное решение, то неоднородное ур-ние разрешимо и притом единственным образом

Если ядро S оператора A состоит только из нуля и $\dim \ker A = n$, то $\dim \operatorname{Im} A = \infty$

Пример: задача в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r < a \\ u(a, \theta) = f(\theta) \end{cases}$$

$$u(r, \theta)$$

$$W(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{a\,(a - r\cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + r^2} \gamma(\alpha)\, d\alpha$$

$$u(a, \theta) = W_0(a, \theta) = \gamma(\theta) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \gamma(t)\, dt = f(\theta)$$

$$\Rightarrow \gamma(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\pi} f(\theta)$$

$$K_1(s_0, s) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \gamma(\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} \gamma(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

↑ транслировали от 0 до 2π для $d\theta$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \gamma(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \gamma(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \gamma(\theta) = \frac{1}{4}f(\theta) - \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(r,\theta) = W(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a(a-r\cos(\theta-\alpha))}{a^2-2ar\cos(\theta-\alpha)+r^2} f(\alpha)\,d\alpha -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a(a-r\cos(\theta-\alpha))}{a^2-2ar\cos(\theta-\alpha)+r^2}\,d\alpha}_{=2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a(a-r\cos(\theta-\alpha))}{a^2-2ar\cos(\theta-\alpha)+r^2} f(\alpha)\,d\alpha -$$

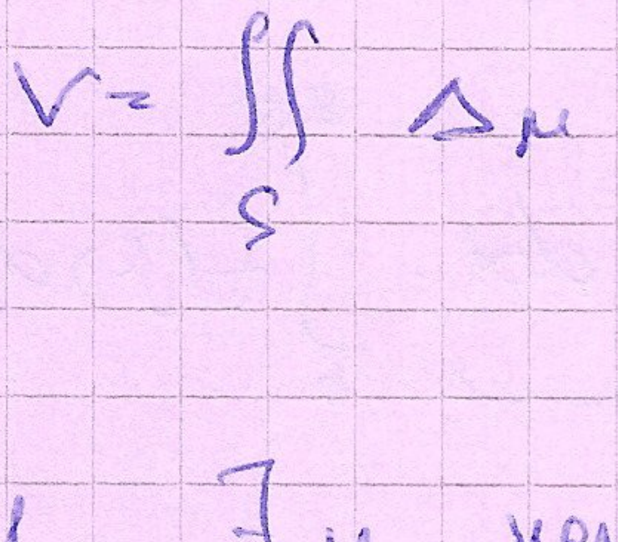
$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2a(a - r\cos(\theta - \alpha))}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + r^2} - 1 \right] f(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\alpha)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha) + r^2}\, d\alpha.$$

13.03

§4 Потенциал простого слоя



$$V(M) = \iint_S \frac{\mu(P)\, ds_p}{2\pi r_{MP}}$$

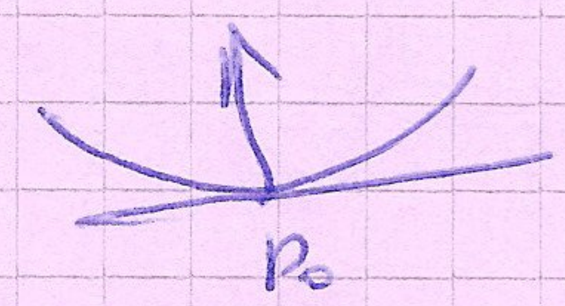
$$V(M) = \int_S \ln \frac{1}{2\pi r_{MP}} \mu(P)\, ds_p$$

$$\Delta V = \iint_S \Delta_M \left(\frac{1}{2\pi r_{MP}} \right) \mu(P)\, ds_p = 0$$

при $M \notin S$

п.1 Ф-ла непр. потенциала простого слоя в точках пов. S

Дано:



$M = \{x, y, z\}$

$z = z(x, y)$

$P = \{\xi, \eta, \zeta(\xi, \eta)\}$

$P_0 = \{0, 0, 0\}$

$$r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta(\xi,\eta))^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$\cos\gamma \, d\sigma_P = d\xi\, d\eta \Rightarrow d\sigma_P = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos\gamma \leq 1 \qquad |\mu(P)| \leq A$$

$$|V_\delta(M)| = \left| \iint_{S_\delta} \frac{\mu(P)\, d\sigma_P}{2 r_{MP}} \right| \leq$$

$$\leq 2A \iint_{\Sigma_{P_0}^{\delta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leq 2A \iint_{\Sigma_A^{2\delta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} =$$

при $\rho = 2\delta$

$$= 2A \cdot 2\pi \int_0^{2\delta} \frac{2\, d\rho}{2} = 8\pi A\delta < \varepsilon$$

На множестве:

$M = \{x, y\}$

$P = \{\xi, \eta(\xi)\}$

$P_0 = \{0, 0\}$

$$V(M) = \int_S \ln \frac{1}{2 r_{MP}}\, \mu(P)\, d\sigma_P$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (Y-\eta(\xi))^2} \geq |x-\xi|$$

$$ds_P = \sqrt{1+(\eta'(\xi))^2}\, d\xi$$

$$|V_\delta(M)| = \left| \int_\xi \ln \frac{1}{r_{MP}} \cdot \mu(P)\, ds_P \right| \leq$$

$$\leq A \int_{-\delta}^{\delta} \ln \frac{1}{|x-\xi|} \sqrt{1+\eta'^2(\xi)}\, d\xi \leq$$

$$\leq -2A \int_{-\delta}^{\delta} \ln|\xi - x|\, d\xi = \{\xi - x = t\} =$$

$$= -2A \int_{-2\delta}^{2\delta} \ln|t|\, dt = -4A \int_0^{2\delta} \ln|t|\, dt =$$

$$= -4A\, t(\ln t - 1)\Big|_0^{2\delta} = -4A\, 2\delta(\ln 2\delta - 1) =$$

$$= 8\delta(1 - \ln 2\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad < \varepsilon$$

№2 Разрыв нормальных производных потенциала простого слоя

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\mu(P)\, ds_P =](M)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0)\right)_H =](P_0) - 2\pi\mu(P_0)$$

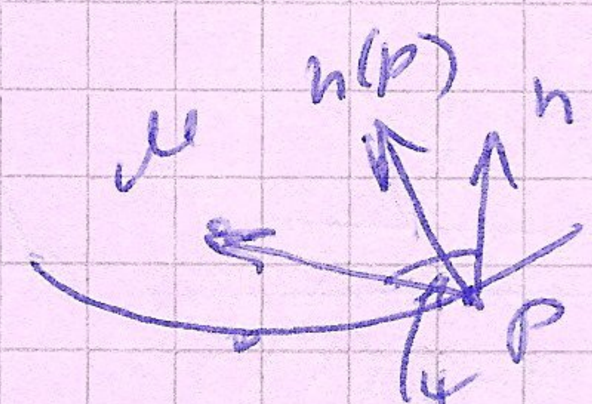
$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0)\right)_H =](P_0) + 2\pi\mu(P_0)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \ell}(M) = \int_S \frac{\partial}{\partial \ell} \ln \frac{1}{r_{PM}} \mu(P) dS_P =$$

$$= -\int_S \frac{\vec{\ell} \cdot \vec{r}_{MP}}{r_{PM}^2} \mu(P) dS_P$$

Пусть $\vec{\ell} = \vec{n}(P_0)$

$$\frac{\partial V}{\partial n}(M) = -\int \frac{\cos\psi(M,P)\,\mu(P)\,dS_P}{r_{MP}} \quad (=)$$



$$\psi(M,P) = \varphi(M,P) + \alpha(P)$$

$$(=) -\int_S \frac{\cos(\varphi(M,P)\cos\alpha(P)\ \mu(P)}{r_{MP}} dS_P +$$

$$+\int_S \frac{\sin\varphi(M,P)\sin\alpha(P)\,\mu(P)}{r_{MP}} dS_P =$$

$$= -W(M) + U(M)$$

$M = \{0, y\}$ $\quad P = \{\xi, \eta(\xi)\}$ $\quad P_0 = \{0,0\}$

$$\sin\alpha(P) = \frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'(\xi)}}$$

$$dl_p = \sqrt{1 + \eta'^2(\xi)}\, d\xi$$

$$|u_\delta(M)| = \left| \int_{S_\delta} \frac{\sin\psi \sin\alpha}{2\pi\rho} \mu(P)\, dl \right| =$$

$$= \left| \int \frac{\sin\psi\, \mu(P)}{\sqrt{\xi^2 + (y-\eta(\xi))^2}} \frac{\eta'(\xi)}{\sqrt{1+\eta'^2(\xi)}} \right| d\xi \quad (\in)$$

$$\eta'(\xi) = \eta'(0) + \xi \eta''(\theta\xi)$$

$\eta'(0) = 0$ — условие гладкости

$$(\in) \int_{-\delta}^{\delta} |\sin\psi\, \mu(P)| \frac{|\eta''(\xi)|\,|\xi|}{\sqrt{\xi^2 + (y-\eta(\xi))^2}} d\xi$$

$\leq$ ограничена

$$\Rightarrow < \in \cdot 2\delta$$

$\uparrow$ $\delta \to 0$ — ограниченное подынтегральное выражение

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}(P_0)\right)_B = -w_B(P_0) + u(P_0) =$$

$$= -w(P_0) - \pi\mu(P_0) + u(P_0) =$$

$$= I(P_0) - \pi\mu(P_0)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(R_0)\right)_{M=} - W_H(R_0) + U(R_0) =$$

$$= - W(R_0) + \sum \mu(R_0) + U(R_0) =$$

$$= J(R_0) + \sigma\mu(R_0)$$

Пример: потенциал простого слоя от сферы

$M = \{r, \theta, \varphi\}$

$P = \{a, \alpha, \lambda\}$

$$r_{MP}^2 = r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha\cos(\varphi - \lambda)$$

$$V(r,\theta,\varphi) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mu(\alpha,\lambda)\, a^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\lambda}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\gamma + a^2}}$$

Пусть $\mu(\alpha,\lambda) = \mu_0$, $V = V(r)$

$M = \{r, 0, \varphi\} \Rightarrow \cos\gamma = \cos\alpha$

$$\Rightarrow V(r) = \mu_0 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\lambda}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\alpha + a^2}} =$$

$$= 2\pi\mu_0 a^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \, d\alpha}{\sqrt{z^2 - 2az\cos\alpha + a^2}} \quad (=)$$

$$z^2 - 2az\cos\alpha + a^2 = t^2$$

$$2t\,dt = 2az\sin\alpha \, d\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \, d\alpha = \frac{t\,dt}{az}$$

$$(=) \quad 2\pi\mu_0 a^2 \frac{1}{az} \int_{|a-z|}^{a+z} \frac{dt}{t} =$$

$$= 2\pi\mu_0 \frac{a}{z} (a+z - |a-z|)$$

① $0 \le z \le a \Rightarrow V(z) = 4\pi\mu_0 a = \text{const}$

② $0 < a \le z \Rightarrow V(z) = 4\pi\mu_0 \frac{a^2}{z} = \frac{e}{z}$

20.03

№3 Сведение задачи Неймана к интегральному уравнению Фредгольма

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } T \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}(M)\right|_S = f(M) \end{cases}$$

$$u(M) = V(M) = \int_S \ln \frac{1}{r_{MP}} \mu(P)\, dS_P$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}(P_0)\right|_S = \left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0)\right)_S = f(P_0)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}(P_0)\right)_S = \frac{1}{2}\mu(P_0) - \frac{1}{2\pi}\mu(P_0) = f(P_0)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi}\mu(P_0) - \int_C \frac{\cos\psi(P_0, P)}{2 r_{P_0 P}} \mu(P)\, dS_P = f(P_0)$$

$$\Rightarrow \mu(P_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\psi(P_0, P)}{r_{P_0 P}} \mu(P)\, dS_P = -\frac{1}{\pi} f(P_0)$$

$S \to P$, $S_0 \to P_0$

$$K_2(S_0, S) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\psi(\vec{S_0}, \vec{S})}{2 r_{S_0 S}}$$

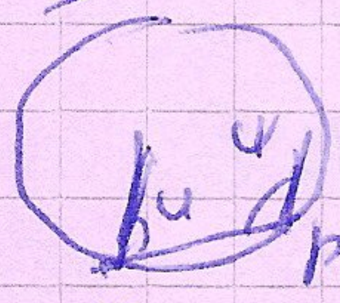
$$\mu(s_0) + \int_0^\ell k_2(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = -\frac{1}{\lambda} f(s_0) \quad (1)$$

$$\mu(s_0) + \int_0^\ell k_2(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = 0 \quad (2)$$

$$\mu(s_0) + \int_0^\ell \overline{k_2}(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = 0 \quad (3)$$

$$\overline{k_2}(s_0, s) = k_2(s, s_0)$$

$$\overline{k_2}(P_0, P) = k_2(P, P_0) \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\frac{\cos\psi(P, P_0)}{2\rho_{PP_0}} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\cos\psi(P_0, P)}{2\rho_{P_0P}} =$$

$$= -k_2(P_0, P) = -k_1(s_0, s)$$

$$\Rightarrow \mu(s_0) - \int_0^\ell k_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell k_1(s_0, s)\,(\mu(s_0) - \mu(s))\,ds = 0.$$

Усл. разрешимости:

$$\int_0^\ell f(s)\,ds = 0$$

$$\int_0^\ell f(p)\,ds_p = 0$$

Задача Неймана для круга:

$$\Delta u = 0 \quad z < a$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a,\varphi) = \left(-\frac{\partial u}{\partial z}(a,\varphi)\right) = f(\varphi)$$

$$M = \{z, \varphi\} \qquad P = \{a, \alpha\}$$

$$u(z,\varphi) = V(z,\varphi) = a\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a\cos(\varphi-\alpha) + z^2}} \mu(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(\varphi-\alpha) + z^2)\,\mu(\alpha)\,d\alpha$$

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial z}(z,\varphi)\right) = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \frac{z^2 - 2a\cos(\varphi-\alpha)}{a^2 - 2a\cos(\varphi-\alpha) + z^2}\mu(\alpha)\,d\alpha$$

$$\left\{-\frac{\partial V}{\partial z}(a,\varphi)\right\}_B = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos(\varphi-\alpha))}{2a^2(1-\cos(\varphi-\alpha))}\mu(\alpha)\,d\alpha -$$

$$-\pi\mu(\varphi) = f(\varphi)$$

$$\Rightarrow \mu(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{\pi} f(\varphi)$$

$$k_2 = -\frac{1}{2\pi} = -k_1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \mu(\varphi)\,d\varphi - \int_0^{2\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$$

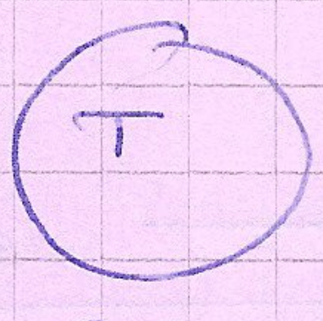
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \mu(\varphi) = -\frac{1}{\pi} f(\varphi) + \mu_0$$

$$\Rightarrow u(z,\varphi) = \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{(a^2 - 2za\cos(\varphi-\alpha)+z^2)} f(\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \frac{q\mu_0}{2}\int_0^{2\pi} \ln (a^2 - 2a\cos(\varphi-\alpha)+z^2)\,d\alpha$$

§ Объемный потенциал



$$u(M) = \iiint_T \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{r_{MP}}$$

объемный потенциал

$$u(M) = \iiint_T \ln \frac{1}{r_{MP}}\,\rho(P)\,d\tau_P$$

п.1 Э и непр. объемного потенциала по всем пр-м

$$J(M) = \iiint_T F(M,P)\,f(P)\,d\tau_P$$

$M \in T$, $\varepsilon > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$

$$J_\delta(M) = \iiint_{T_\delta} F(M,P)\,f(P)\,d\tau_P$$

$|\mathcal{I}_\delta(\vec{M})| < \varepsilon$, где

T_δ - могла область $\in K_M^\delta$

$\vec{M} \in K_M^\delta$

$$|F(M,P)| \leq A \frac{1}{r_{MP}^\alpha}, \quad \alpha < n$$

№2 Первые производные объемного потенциала

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \iiint_T \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \times$$

$$\times \rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \iiint_T \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} \rho(P)\,d\tau_P = X(x,y,z)$$

$$\left|\frac{\xi - x}{r_{MP}}\right| \leq 1$$

$$\frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x,y,z)}{\Delta x} \to X(x,y,z)$$

$T_1 = K_M^\delta$, T_2

$$= c \iiint_{\Omega} \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \rho} d\rho = c \omega s \int_0^{2\pi} d\lambda = 2\pi c \omega s$$

$$|X_1| = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2\pi\rho} |\rho(\rho)| d\tau_\rho \quad \text{(spherical coordinates)}$$

$$\leq \left| \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x,y,z)}{\Delta x} \right| \cdot \left\{ \begin{array}{l} |\alpha - \xi| < \varepsilon/2 \\ \Delta x < \delta \end{array} \right. + |X_1| \left| \frac{u_2(x+\Delta x, y, z) - u_2(x,y,z)}{\Delta x} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

$$- X_2(x,y,z)|$$

$$- X_1(x,y,z) - X_2(x,y,z)| \leq$$

$$+ \frac{u_2(x+\Delta x, y, z) - u_2(x,y,z)}{\Delta x} \cdot$$

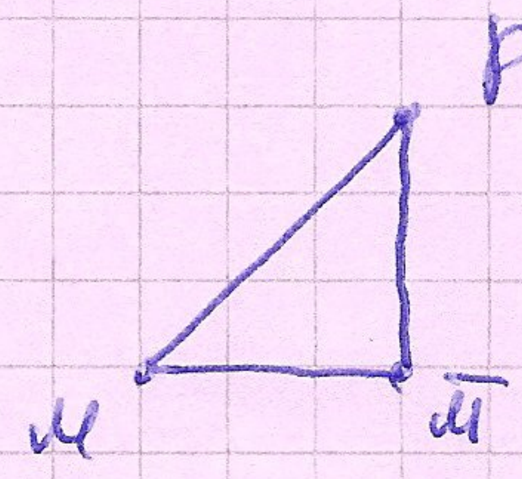
$$\Rightarrow \left| \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x,y,z)}{\Delta x} \right| \leq$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\rho) d\tau_\rho}{2\pi\rho} = u_1 + u_2$$

$$\left| \frac{u_1(x+\Delta x, y, z) - u_1(x, y, z)}{\Delta x} \right| =$$

$$= \frac{1}{|\Delta x|} \iiint_{T_1} \left| \left(\frac{1}{2\mu\rho} - \frac{1}{2\mu\rho} \right) \right| |\rho(P)| \, d\tau_p \leq$$

$$\leq \frac{c}{|\Delta x|} \iiint_{T_1} \left| \frac{2\mu\rho - 2\mu\rho}{2\mu\rho 2\mu\rho} \right| d\tau_p \qquad (\leq)$$



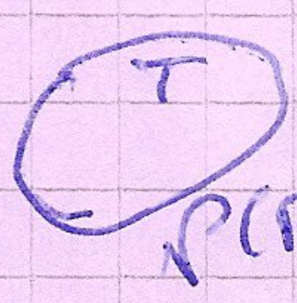
$$(\leq) \quad c \iiint_{T} \frac{1}{2\mu\rho 2\mu\rho} \, d\tau_p \leq$$

$$\leq \frac{c}{2} \iiint_{T} \left(\frac{1}{2^2\mu\rho} + \frac{1}{2^2\mu\rho} \right) d\tau_p \leq$$

$$\leq \frac{c}{2} (4\pi\delta + 4\pi \cdot 2\delta) = 6c\pi\delta$$

$$10\pi\delta c < \varepsilon/2 \;, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{20\pi c}$$

2703



$$u(M) = \iiint\limits_T \frac{1}{r_{MP}} \rho(P) d\tau_P$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \iiint\limits_T \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) \rho(P) d\tau_P =$$

$$= \iiint\limits_T \frac{\xi - x}{r_{MP}^3} \rho(P) d\tau_P$$

$$\frac{|\xi - x|}{r_{MP}} \leq 1$$

n3. Вторые производные объемного потенциала

$\forall M$ вне $T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \iiint\limits_T \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) \rho(P) d\tau_P =$$

$$= \iiint\limits_T \frac{3(\xi - x)^2 - r_{MP}^2}{r_{MP}^5} \rho(P) d\tau_P$$

$\Delta u = 0$ вне T

ρ - пр и нш.

ρ - неодн. диэл-ка в пр. с. м

$T_1 = k_м^{\delta}$

T_2 - все остальное

$u(M) = u_1(M) + u_2(M)$

↑ имеет все производные, т.к. $M \notin T_2$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi r_{MP}}\right) \rho(P)\, d\tau_P =$$

$$= -\iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4\pi r_{MP}}\right) \rho(P)\, d\tau_P =$$

$$= -\iiint_{T_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{4\pi r_{MP}}\rho(P)\right) - \frac{1}{4\pi r_{MP}} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P) \right\} d\tau_P =$$

$$= -\iint_{\Sigma_1^{\delta}} \frac{\cos}{4\pi r_{MP}} \rho(P)\, d\sigma_P + \iiint_{T_1} \frac{1}{4\pi r_{MP}} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P)\, d\tau_P$$

поверх. инт-л, т.к. $M \notin \Sigma_1^{\delta}$

↑ объемный инт-л по сфере

↑ равномерно ограниченная ф-я, т.к. $r_{MP} \neq 0$ и ее область интегрирования

$$= -\frac{\mu^2}{3}\rho(w) \xleftarrow{\delta \to 0} -\frac{\mu^2}{3}\rho(p^*)$$

$$\Rightarrow (\in) = -\frac{1}{2\pi}\rho(p^*)\frac{4\mu\delta^2}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\rho(p^*)\iint_{\Sigma_\delta} \cos^2\alpha \, d\sigma_p \quad (\in)$$

$$\|\cos\alpha\|^2 = \|\cos\alpha\|^2_{L^2} = \|\cos^2\alpha\|_{L^1}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\rho(p^*)\iint_{\Sigma_\delta} \frac{\cos^2\alpha}{2\pi\delta^2}\rho(p)\,d\sigma_p =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma_\delta} \frac{1}{2\pi\delta^2}\cos^2\alpha\,\rho(p)\,d\sigma_p \quad (\in)$$

$$\cos\alpha = \frac{z-x}{\|x-\xi\|}$$

$$= -\iint_{\Sigma} \frac{z-x}{2\pi\|x-\xi\|^3}\cos\alpha\,\rho(p)\,d\sigma_p \quad (\ni)$$

$$= \underbrace{\rho(p)}_{\cos\alpha}\int\left(\frac{d\mu_2}{f}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial x} = \iiint_{T_1} \frac{\xi - x}{r^3_{\kappa\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(P)\, d\tau_p$$

$$\left|\frac{\partial I_2}{\partial x}\right| \le c_1 \iiint_{T_1} \frac{1}{r^3_{\kappa\rho}}\, d\tau_p =$$

$$= 4\pi\delta c_1 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\rho(M) + \lim_{\delta\to 0} \iiint_{T_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2_{\kappa\rho}}\right) \times \rho(P)\, d\tau_p$$

$$\iiint_{T_2} \frac{3(\xi - x)^2 + 2^2_{\kappa\rho}}{2^5_{\kappa\rho}} \times \rho(P)\, d\tau_p$$

$\Rightarrow 2^{\text{go}}$ слагаемое двойной интеграл при $\delta \to 0$

$\Rightarrow$ это интеграл в смысле главного значения.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = -\frac{4\pi}{3}\rho(x) + \iiint_T \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{xp}}\right) \times$$

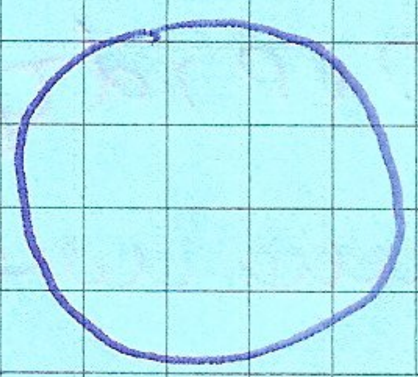
$$\times \rho(p)\, dV_p =$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\rho(x) + \iiint_T \frac{3(\xi - x)^2 - r_{xp}^2}{r_{xp}^5}\rho(p)\, dV_p$$

$$\Delta u = -4\pi\rho(x) \quad \text{в обл } T$$

$$\Delta u = \begin{cases} -4\pi\rho(x) & \text{в } T \\ 0 & \text{вне } T \end{cases}$$

Пример:



$$x = \{z, 0, \varphi\}$$

$$p = \{s, \alpha, \nu\}$$

$$r_{xp} = \sqrt{z^2 - 2zs\cos\alpha + s^2}$$

$$u(z) = 2\pi \int_0^a s^2\, ds \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zs\cos\alpha + s^2}} \times$$

$$\times \rho(s) \sin\alpha\, d\alpha \Rightarrow$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{r}\left\{\frac{2}{3}r^3 + r\left(a^2 - r^2\right)\right\} =$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{3r^2}\left\{a^3 - \left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\right\}$$

$$0 < r < a \qquad u(r) = \frac{4\pi}{r}\rho_0 \int_0^r s^2 ds + 4\pi\rho_0 \int_r^a s\, ds =$$

$$= 2\pi\rho_0 \left\{r^2 - \frac{1}{3}r^2\right\}$$

$$r > a \qquad u(r) = \frac{4\pi}{r}\rho_0 \int_0^a s^2 ds =$$

$$= \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3r}$$

$$\frac{r > a}{} \qquad u(r) = \frac{1}{r}\int_0^a \rho(s)\, s^2 ds = \frac{1}{r}\int_0^a \rho(s)\, s^2 ds +$$

$$+ r\int_a^r \rho(s)\, s\, ds \Big\} =$$

$$= 2\pi\rho_0 \left\{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right)\right\} =$$

$$= \pi\rho_0\left(a^2 + 2r^2 - \frac{2}{3}a^2\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{a^2}{2r^2}\right) =$$

$$= \frac{M}{2r}\left(3 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\rho_0 \int_0^a \rho(s)\, s^2 ds \int_0^\pi \sin\alpha\, d\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 8\pi^2 \rho_0 \int_0^a \rho(s)\, s^2 ds \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\left(r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha\right)^{1/2}} =$$

$$= 4\pi^2 \rho_0 \int_0^a \rho(s)\, s^2 ds \int_{(r-s)^2}^{(r+s)^2} \frac{dx}{2rs\, x^{1/2}} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{rs}\rho_0 \int_0^a \rho(s)\, s^2 ds \left\{(r+s) - (r-s)\right\} =$$

$$= 8\pi^2 \rho_0 \int_0^a s^2 ds$$

$$= \frac{8\pi^2}{3}\rho_0 a^3$$

$$u(a-0) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^2$$

$$u(a+0) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^2$$

$r > a$ $\quad u(r) = -\frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \frac{1}{r^2}$

$0 \le r < a$ $\quad u(r) = -\frac{4\pi}{3} \rho_0 r$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$r > a$ $\quad \Delta u = 0$

$0 < r < a$ $\quad \Delta u = -4\pi\rho_0$

§10 $\Delta v + cv = -f(x,y)$

n.1 Некоторые задачи приводящие к уравнению $\Delta v + cv = -f(x,y)$

① Задача о малых поперечных колебаниях $u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t)$

$f(x,t) = f(x) e^{i\omega t}$

$u(x,t) = v(x) e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow -\omega^2 v(x) e^{i\omega t} = a^2 e^{i\omega t} \Delta v(x) + f(x) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \Delta v + \frac{\omega^2}{a^2} v = -\frac{1}{a^2} f(x)$$

$$k = \frac{\omega}{a}$$

$$\Rightarrow \Delta v + k^2 v = -\frac{1}{a^2} f(x)$$

(29) Задача диффузии или плотности распределения или цепного процесса

$$u_t = D \Delta u + f(x,t)$$

u — 0, $+u$ сила процесса

$$C = -\frac{\alpha}{D} < 0$$

$$f(x,t) = -\alpha u + f_1$$

№2: Краевая задача на с.зн. и с.ф-ии для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta\vec{v} + \lambda\vec{v} = 0 \quad \text{в } T. \\ \vec{v}(M)|_S = 0 \\ \vec{v}(M) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$G(M,P)$ – ф-я Грина

$$\Delta\vec{v} = -\lambda\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \lambda \iiint_T G(M,P)\,\vec{v}(P)\,d\tau_P$$

однородное интегральное ур-ние Фредгольма

$\vec{v}(M) \not\equiv 0$.

Вывели для него ур-ние:

симметричная ядра

1. Э бесконечная посл-ть с. зн.
чьи зоны $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Наиболее с. ж. принадлежит
конечное число λ из с. ф-ии
Система с. ф-ий замкнута

2. $\lambda_n > 0$

3. с. ф-ии, принадлежащие
разным с. ж, ортогональны,
т.е $\iiint_T \vartheta_n(M)\,\vartheta_m(M)\,dT = 0$.

4. T-ка решения Бешова.
Всякая функ непр дифф-ма
в обл T ф-ла, обращающаяся
в 0 на гр, области, может
быть в сф. и фор. Ох-ла
Рид по сфе ф-ии.

Дан-ло сл-ла 2:

1ая ч-ка Грина

$$\Rightarrow \iiint_T (v_n \Delta v_n + \text{grad } v_n \text{ grad } v_n) dT =$$

$$= \iint_S v_n \frac{\partial v_n}{\partial \nu} ds$$

$$\overset{\text{II}}{0}$$ из гран условия

$$\Rightarrow \iiint_T (\text{grad } v_n \overset{\text{II}}{0} \text{grad } v_n - \lambda_n v_n^2 \overset{\text{II}}{0}) dT = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_n \geq 0.$$

2ф

Дан-ло сл-ла 3:

$v_n \to \lambda_n$ $\lambda_n \neq \lambda_m$

$v_m \to \lambda_m$

3ая ч-ка Грина

$$\Rightarrow \iiint_T (v_n \Delta v_m - v_m \Delta v_n) dT =$$

$$= \iint_S \left(v_n \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m \frac{\partial v_n}{\partial \nu} \right) ds$$

$$\overset{\text{II}}{0}$$ из гр усл

$$\Rightarrow \iiint_T (\lambda_n - \lambda_m) v_n v_m \, d\tau = 0$$

$\neq 0$

$$\Rightarrow \iiint_T v_n v_m \, d\tau = 0$$

$\forall n, m$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

λ_1 $\quad v_1$

λ_2 $\quad v_{2,1} \quad v_{2,2} \dots v_{2,s_2} \dots$

λ_3 $\quad v_{3,1} \quad v_{3,2} \dots v_{3,s_3} \dots$

- - - - - - - - - - - - - - - -

Набор $\Lambda\Phi$З с. ф-ий можно записать на ортонормированную систему $\Rightarrow$ получили ортонормированную систему всех собств ф-ий

$$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n v_n(M)$$

$$\iiint_T f(M) v_m(M) \, d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \iiint_T v_n(M) v_m(M) \, d\tau =$$

$$= f_m \nu_m \iiint_T \vec{v}_m^2 \, dT$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{1}{\nu_m} \iiint_T f(M) \cdot v_m(M) \, dT$$

№3 Внутренние краевые задачи

Ур-ние $\Delta v + cv = -f$.

$$\begin{cases} \Delta v + cv = -f(M) \\ v(M)|_S = g(M) \end{cases}$$

Пусть v_1 и v_2 – решения

v_1, v_2 $\quad w = v_1 - v_2$

$$\begin{cases} \Delta w + cw = 0 \quad в \ T \\ w(M)|_S = 0 \end{cases}$$

Если $c \neq \lambda_n$, то задача имеет только тривиальное решение

$\Rightarrow$ исх. задача имеет ед. решение

Если $C = \lambda_n$, то ед не будет,
т.к. тогда они имеют некоторые
решения, тогда не имеет решения.

При $C \le 0$ физического
нет смысла, т.к. $\lambda_n > 0$

$C = -\varkappa^2 < 0 \Rightarrow \Delta v - \varkappa^2 v = 0$ в T

то она не имеет иного нуля.
имеет и один нуль.

Дано: (с прошлого)

но $v(x_0) > 0$

$\Rightarrow \Delta v(x_0) \le 0 \Rightarrow$ ** сумма

25

Решим $\begin{cases} \Delta v + cv = -f(x) \text{ в } T \\ v(x)|_S = 0 \end{cases}$

Будем искать решение в виде
ряда: $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x)$,

где $\Delta v_n = -\lambda_n v_n$

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(u) \Rightarrow$$

где $f_n = \frac{f}{N_n} \iiint_T f(u) v_n(u) dT_u$

$\Rightarrow$ подставим в ур-ние $\Rightarrow$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_n \lambda_k v_n(u) + C \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(u) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n(u)$$

$$\Rightarrow -A_n \lambda_{k_0} + C A_n = -f_n$$

$$\Rightarrow \cancel{A_n = \frac{-f_n}{C - \lambda_n}}$$

$$A_n (\lambda_n - C) = f_n$$

1) Если $C \neq \lambda_n \Rightarrow A_n = \frac{f_n}{\lambda_n - C}$

2) Если $C = \lambda_{n_0}$

$$A_{n_0} \cdot 0 = f_{n_0}$$

$$A_n (\lambda_n - \lambda_{n_0}) = f_n$$

2а) Если $f_{n_0} \neq 0 \Rightarrow$ решения нет

2б) Если $f_{n_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{N_{n_0}} \iiint_T f(u) v_{n_0}(u) dT = 0$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n_0}} f_n \quad \text{при } n \neq n_0$$

A_{n_0} – любое

№4 Ф-ла Грина потенциалов

$$\Delta v + cv = 0$$

$$v = v(r)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dv}{dr}\right) + cv = 0$$

Расчет $\quad w = \frac{v}{r} \Rightarrow v = rw$

Расчет $\quad v = \frac{1}{r} w \Rightarrow v = \frac{w}{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = \frac{dw}{dr}\frac{1}{r} - w\frac{1}{r^2}$$

$$r^2 \frac{dv}{dr} = r\frac{dw}{dr} - w$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dv}{dr}\right) = r\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - \frac{dw}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad w'' + cw = 0$$

Рассм $c = -\varkappa^2 < 0$

$$v_1(z) = \frac{e^{\varkappa z}}{z} \qquad v_2(z) = \frac{e^{-\varkappa z}}{z}$$

Рассм $c = k^2 > 0$

$$v_1 = \frac{e^{ikz}}{z} \qquad v_2 = \frac{e^{-ikz}}{z}$$

$$u_1(z,t) = \frac{e^{i(\omega t + kz)}}{z} \qquad u_2(z,t) = \frac{e^{i(\omega t - kz)}}{z}$$

$$\Delta v + cv = -f$$

$$L[v] = \Delta v + cv = 0$$



$$\iiint_T (v\Delta u - u\Delta v)\,d\tau = \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$$

$$\iiint_T (v\Delta u + vcu - u\Delta v - ucv)\,d\tau =$$

$$= \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$$

$$\Rightarrow \iiint_T (vL[u] - uL[v])\,d\tau =$$

$$= \iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds$$

$$u = \frac{e^{-\varkappa z}}{z} \qquad z = z(M_0, M) \quad M \neq -\frac{e^{-ikz}}{z}$$

$$V(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{-\varkappa z}}{z}\frac{\partial V}{\partial n}(M) - V(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-\varkappa z}}{z}\right)\right) ds_M$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_T L[v]\,\frac{e^{-\varkappa z}}{z}\,d\tau_M$$

Если $c = -\varkappa^2 < 0$

$$V(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{-\varkappa z}}{z}\cdot\frac{\partial V}{\partial n} - V(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-\varkappa z}}{z}\right)\right) ds_M - \frac{1}{4\pi} \times$$

$$\times \iiint_T \angle[\cdot] \frac{e^{-ikr_2}}{2} d\tau_M$$

по формуле Кирхгофа

для объемного потенциала:

$$V(M) = \iiint_T \frac{e^{-ikr_2}}{2} \rho(P) d\tau_P$$

$$c = k^2 > 0 \qquad 2 = 2\mu\rho$$

$$V(M) = \iiint_T \frac{e^{-\varkappa r_2}}{2} \rho(P) d\tau_P$$

$$c = -\varkappa^2 < 0.$$

Св-ва:

①. Если $\rho(P)$ – огр и ин-ма, то объемный потенциал определен, огр и имеет непр частные производные во всех тр-ке Гельдера производные можно вычислять дифф-ем под знаком интеграла

② Все обл T Э поле задает объемного потенциала, причем они все можно вычислить

фор-ии из знания интеграла
кривой $\Delta V + cV = 0$

(3.) В т. области T, в пер которую ф-я ρ - непр фор-ма, $\exists$ вторые производные объемного потенциала, которые ближайшего из ф-и:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M) = \iiint_T \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\rho(P)\,d\tau_p - \frac{4\pi}{3}\rho(M)$$

$$L[V] = -4\pi\rho(M)$$

$f(M)$ - определена всюду, но имеет ограниченный носитель.

Будем рассм задачу в непр ур-ке

(4.5) Задача для ур-ия $\Delta V - \varkappa^2 V = -f(M)$ в непр ур-ве (I)

$V \rightrightarrows 0$ на бесконечности

$\varepsilon > 0 \quad \exists S_2 \quad |V(M)| < \varepsilon$

↑ сфера

Задача I и имеет ниже 2^x разных решений:

v_1, v_2 : $W = v_1 - v_2$

$$\Rightarrow \underset{II}{\begin{cases} \Delta W - \varkappa^2 W = 0 \\ W \Longrightarrow 0 \end{cases}}$$

$\exists M_1$: $W(M_1) = A > 0$

Пусть $\varepsilon = A/2 \rightarrow S_2$: $|W(M)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ внутри сферы $\exists M_2$:

$W(M_2)$ имеет наиб. положительный

$\Rightarrow \not\Leftarrow$ принципу наиб. и наим.

$\Rightarrow W \equiv 0$.

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{e^{-\varkappa r_{MP}}}{r_{MP}} f(P)\, d\tau_P$$

(№6) Задача для ур-ния $\Delta V + k^2 V = -f$ в неограниченной обл-ти. Условия излучения

$$\Delta V + k^2 V = -f(M)$$

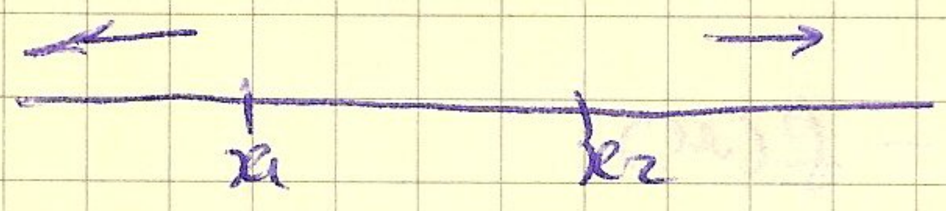
$\exists$ 2 решения, если на бесч. $V(M) \Rightarrow 0$:

$$V_1(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_T \frac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} f(P)\,d\tau_P$$

$$V_2(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_T \frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} f(P)\,d\tau_P$$

$$V(M) = \alpha V_1(M) + \beta (1-\alpha) V_2(M)$$

↑ функциональное семейство решений



$$V_{xx} + k^2 V = 0$$

$\underline{x > x_2}$ $\quad V(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$

$$V(x) \to u(x,t) = A_1 e^{i(kx+\omega t)} + A_2 e^{i(\omega t - kx)}$$

$V'(x) + ikV = 0$ ← отсюда линии тока, приходящие из бесконечности

$\underline{x < x_1}$ $\quad V(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}$

$$u(x,t) = B_1 e^{i(kx+\omega t)} + B_2 e^{i(\omega t - kx)}$$

$V'(x) - ikV = 0$. ← отсюда линии тока, уходящие в бесконечность

$\swarrow$ для расх-ся сферр. волн

$$\text{I}\begin{cases} V(\infty) = O(\tfrac{1}{2}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} + ikV = o(\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

Условие излучения Зоммерфельда

$$\text{II}\begin{cases} V(\infty) = O(\tfrac{1}{2}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} - ikV = o(\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

$\swarrow$ для сх-ся сферр волн

$$\Rightarrow \text{III}\begin{cases} \Delta V + k^2 V = -f(x) \\ V(\infty) = O(\tfrac{1}{2}) \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} + ikV = o(\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

Утв: Задача III имеет ед решение

Доказ-во: $V_1, V_2 \qquad W = V_1 - V_2$

$$\begin{cases} \Delta W + k^2 W = 0 \\ W(x) = O(\tfrac{1}{2}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial z} + ikW = o(\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

$$W(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left(\frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} \frac{\partial W}{\partial n} - \right.$$

$$\left. - W(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} \right) \right) dS_M$$

$$r_{0M} = \sqrt{r_0^2 - 2r_0 r \cos\theta + r^2}$$

$$r \gg r_0$$

$$\frac{1}{r_{0M}} = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial r_{0M}}{\partial r} = \frac{r - r_0\cos\theta}{\sqrt{r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{0M}} \left(\frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial r_{0M}}{\partial r} =$$

$$= \left(-ik - \frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} - \frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}^2} \right) \times$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= -ik \frac{e^{-ikr_{0M}}}{r_{0M}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -ikW + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$W(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left\{ -ikW \frac{e^{-ikr_{M_0M}}}{r_{M_0M}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) + \right.$$

$$\left. + ik \frac{e^{-ikr_{M_0M}}}{r_{M_0M}} W + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right\} ds_M =$$

$$= \iint_{S_2} O\left(\frac{1}{r^2}\right) ds_M \longrightarrow 0$$

$r \to \infty$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} f(P) d\tau_P$$

T

удовлетворяет уравнению

на бесконечности

3) Доказать единственность решения задачи

и его решение дадим

$$\frac{\partial V}{\partial z} + ikV = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} \right) + \right.$$

$$\left. + ik \frac{e^{-ikr_{MP}}}{r_{MP}} \right\} f(P) d\tau_P$$

$$r_{MP} = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\theta + \rho^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_T \rho \left[L - \partial k \frac{e^{-ik2_{MP}}}{2_{MP}} - \right.$$

$$- \frac{1}{2^2} \frac{e^{-\partial k 2_{MP}}}{2^3_{MP}} \left. + ik \frac{e^{-\partial k 2_{MP}}}{2_{MP}} \right\} f(p) d\tau_p =$$

$$= O\left(\frac{1}{2^2}\right) = o\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{уровень теории}$$
$$\text{уже нулевой}$$

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_T e^{\frac{i(\omega t - k 2_{MP})}{2_{MP}}} f(p) d\tau_p \mapsto$$

$$\mapsto \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_T \frac{\cos(\omega t - k 2_{MP})}{2_{MP}} f(p) d\tau_p$$

Глава 5. Задачи для уравнения теплопроводности и колебаний в случае нескольких пространственных переменных

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t)$$

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t)$$

§1 Некоторые задачи, приводящие к уравнению колебаний и диффузии

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{cases}$$

О ц косе. уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H}$$

$$\Delta \vec{H} = \Delta H_x \cdot \vec{i} + \Delta H_y \vec{j} + \Delta H_z \vec{k}$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} \vec{E} =$$

$$= -\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$H = H_x, H_y, H_z$$

$$\Delta H = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} \leftarrow$$

← уравнение колебаний

① Непроводящая среда, $\sigma = 0$.

⇒ общее уравнение колебаний

$\Delta H = a^2 H_{tt}$, где $a^2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

② Теория волнения слабого преобразователя

$$\Delta u = \frac{4\pi\rho}{c^2}\frac{\partial q}{\partial t}$$

Ур-ние акустики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \\ p = f(\rho) \end{cases}$$

$v_0, \rho_0, \vec{v}=0$ ← невозмущенная среда

Малые движения на равномерном фоне ! ⇒ можно линеаризовать ур-ния

$$s = \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} \qquad |s| \ll 1$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

$$p = p_0(1+s)$$

$$p = p_0(1+s)^\gamma \approx p_0(1+\gamma s)$$

$$\frac{1}{\rho_0(1+s)}\, p_0\gamma\, \mathrm{grad}\, s = \frac{p_0\gamma}{\rho_0(1+s)}\, \mathrm{grad}\, s$$

$$\frac{p_0\gamma}{\rho_0}\left(1 - s + s^2 + \dots\right)\mathrm{grad}\, s = \frac{p_0\gamma}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\, s$$

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \mathrm{grad}\, p\vec{v} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} \approx \rho_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

$$\Rightarrow \rho_0\frac{\partial s}{\partial t} = -\rho_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{p_0\gamma}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\, s$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\mathrm{div}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{p_0\gamma}{\rho_0}\Delta s$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{p_0\gamma}{\rho_0}\Delta s$$

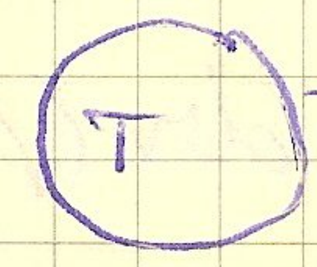
$$a^2 = \frac{p_0\gamma}{\rho_0}$$

Колебания мембраны:
(уравнение Даламбера)

§2 Задача на угадывание
колебания с закрепленными на ограниченной области.

(n1) Постановка задачи. Теорема единственности

$$I_a \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M,t) \\ M \in T,\ t > 0 \\ u(M,t)\big|_S = \mu(M,t) \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M) \end{cases}$$



Т1 Задача I_a не может иметь двух разных решений

Доказательство: u_1, u_2 ; $v = u_1 - u_2$

$$E(t) = \frac{1}{2} \iiint_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v \right\} d\tau$$

$$\text{Id}\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M,t) \\ u(M,t)\big|_S = \mu(M,t) \\ u(M,0) = \varphi(M) \end{cases}$$

Т: Задача Id не может иметь
2 решения

Доказ-во: u_1, u_2

$$v(M,t) = u_1 - u_2$$

$$\text{Id}\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v \\ v(M,t)\big|_S = 0 \\ v(M,0) = 0 \end{cases}$$

аналогии
физическому смыслу

$u(M,t)$ $u_t = a^2 \Delta u$ $T: 0 < t \le t_0$

$\text{пер } T + \xi = \overline{T}$ $0 \le t \le t_0$

$\Rightarrow$ физика нам не помеха

Значение либо на гр S,
либо при $t=0$

$$I\alpha \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\ u(x,t)|_S = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \Leftrightarrow I\beta \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\ u(x,t)|_S = 0 \\ u(x,t) = \\ = V(x) T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$I\delta \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \\ u(x,t)|_S = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \Leftrightarrow I\gamma \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \\ u(x,t)|_S = 0 \\ u(x,t) = \\ = V(x) T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$I\alpha_1$

$$V T' = a^2 T \Delta V$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda$$

$$III \begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0 \\ V(x)|_S = 0 \\ V(x) \not\equiv 0 \end{cases} \qquad IV\alpha \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ T(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

$$IV\beta \begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

$u_n(x,t) = (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t) v_n(x)$ IIв

$u_n(x,t) = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(x)$ IIб

Iа:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t) v_n(x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x) = \varphi(x)$$

$$A_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \iiint_V \varphi(x) v_n(x)\, dV$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\, a\, v_n(x) = \psi(x)$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\, a \|v_n\|^2} \iiint_V \psi(x) v_n(x)\, dV$$

Iб: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} v_n(x)$

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \iiint_V \varphi(x) v_n(x)\, dV$$

№3 В прямоугольнике и в прямоугольном параллелепипеде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda v = 0 \\ v|_S = 0 \\ v(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

$v(x,y) = X(x) Y(y)$

$X'' Y + X Y'' + \lambda X Y = 0$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$

$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \lambda\right) = -\alpha$

$X'' + \alpha X = 0$ $\quad$ $Y'' + \beta Y = 0$

$X(0) = X(l_1) = 0$ $\quad$ $Y(0) = Y(l_2) = 0$

$X(x) \neq 0$ $\quad$ $Y(y) \neq 0$

$\alpha_n = \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2$ $\quad$ $\beta_m = \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2$

$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l_1} x$ $\quad$ $Y_m(y) = \sin \frac{\pi m}{l_2} y$

$$u_{n,m}(x,y) = \sin\frac{\pi n x}{l_1}\sin\frac{\pi m y}{l_2}$$

$$\lambda = \lambda_{n,m} = \left\{\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2\right\}$$

$$\|v_{n,m}\|^2 = \frac{l_1 l_2}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \\ u(M,t)\big|_S = 0 \\ u(M,0) = 0 \\ u_t(M,0) = V_0 \end{cases}$$

$$l_1 = l_2$$

$$u(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} \sin\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}\,at \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi m}{l}y$$

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (n^2+m^2)$$

$$B_{n,m}\frac{\pi}{l}\sqrt{n^2+m^2}\,a = \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l V_0 \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot \sin\frac{\pi m}{l}y\,dx\,dy$$

$$B_{n,m} = \frac{V_0 4l}{l^2 a \pi\sqrt{n^2+m^2}} \int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \cdot$$

$$\times \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi n}{\ell} y \, dy =$$

$$= \frac{V_0 4}{\ell a \pi \sqrt{n^2 + m^2}} \frac{\ell}{\pi n} \left(1 - (-1)^n\right) \times$$

$$\times \frac{\ell}{\pi m} \left(1 - (-1)^4\right) =$$

$$= \frac{V_0 4 \ell}{a \pi^3 n m \sqrt{n^2 + m^2}} \left(1 - (-1)^n\right)\left(1 - (-1)^m\right)$$